Podejrzane twierdzenie o ciągach

Adam BOBROWSKI, Adam GREGOSIEWICZ**

* Politechnika Lubelska

Nietrudno uzasadnić, że ze zbieżności dwóch ciągów liczb rzeczywistych wynika zbieżność ich różnicy, z granicą równą różnicy odpowiednich granic. Innymi słowy, jeżeli granice $\lim_{n\to\infty} a_n$ i $\lim_{n\to\infty} b_n$ istnieją, to ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} - \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Przypomnijmy, że ciągi dodajemy i odejmujemy następująco: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \pm \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n \pm b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Oczywiście implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa: jeżeli wiemy tylko tyle, że ciąg $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to niewiele można powiedzieć o samych $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – oba mogą być rozbieżne. By się o tym przekonać, wystarczy wziąć dowolny ciąg rozbieżny $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i przyjąć $b_n := a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Nieco mniej trywialny przykład można skonstruować, wykorzystując sumy częściowe szeregu harmonicznego. Niech mianowicie

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}, \qquad n \geqslant 1.$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $H_{n+1} - H_n = 1/(n+1)$, zatem przyjmując $a_n := H_{n+1}$ i $b_n := H_n$, widzimy, że ciąg $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do zera, a jednocześnie ciągi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są rozbieżne do $+\infty$.

Elementarny dowód faktu, że ciąg $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny, Czytelnik znajdzie w artykule T. Małolepszego *Człapanie do nieskończoności* (Δ^3_{14}).

Przez chwilę można liczyć na to, iż w tego typu kontrprzykładach istotną rolę odgrywa fakt, że rozważane ciągi w pewien sposób od siebie zależą. Może dla ciągów *istotnie* różnych – jakkolwiek tę istotną różność zdefiniujemy – takich kontrprzykładów nie da się skonstruować? Nadzieja ta jest jednak płonna. Niech $a_n := H_n$ i $b_n := \ln n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oba ciągi dążą do $+\infty$, a mimo to ciąg $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę. Rzeczywiście, jak nietrudno uzasadnić, jest on malejący i ograniczony z dołu, a każdy taki ciąg jest zbieżny. Granicę

$$\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = 0{,}577215\ldots$$

nazywamy *stałą Eulera* i oznaczamy zwykle przez γ.

Informacje o tym, w jaki sposób można konstruować całe rodziny nietrywialnych par ciągów rozbieżnych o zbieżnych różnicach, Czytelnik Zainteresowany znajdzie w ciekawej pracy J. Dence, T. Dence, *Pairs of divergent sequences whose differences converge*, Pi Mu Epsilon Journal 13 (2009), 21–32.

Skoro zbieżność $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie mówi zbyt wiele o samych ciągach $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, być może warto rozważać pewne szczególne podklasy ciągów. Załóżmy na przykład, że jeden z nich jest przesunięciem drugiego, powiedzmy $a_n := b_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i danego $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Jak zauważyliśmy wcześniej (rozważając ciąg o wyrazach $b_n := H_n$), ze zbieżności $\{b_{n+1} - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie można wywnioskować zbieżności $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Co ciekawe, można natomiast wykazać implikację nieco inną: $\lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = g$ pociąga za sobą $\lim_{n\to\infty} b_n/n = g$.

Wyposażeni już w pewną intuicję, przejdźmy do tytułowego twierdzenia, które być może nie ujrzałoby światła dziennego, gdyby nie to, że – z powodów, nad którymi nie będziemy się tu rozwodzić – jeden z autorów tego artykułu rozważał niedawno klasę ciągów $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że

$$\lim_{n\to\infty} 3^n(8b_{n+1} - 9b_n + b_{n-1}) = 0.$$

Czytelnik być może zechce zajrzeć na stronę 215 monografii „Generators of Markov chains”, wydanej ostatnio przez Cambridge University Press.

Rzut oka na tę klasę z nieco innej perspektywy pozwolił zauważyć, że każdy jej element spełnia też warunek

$$\lim_{n\to\infty} 3^n(b_{n+1} - b_n) = 0.$$

To już wydało się podejrzane – przez chwilę autor miał wręcz wątpliwości, czy na pewno wspomniana wyżej perspektywa nie wykrzywia rzeczywistości, czy jej nie zakłamuje – ponieważ przyjmując

$$a_n := 3^n(b_{n+1} - b_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

otrzymywał w ten sposób implikację

$$\lim_{n\to\infty} (8a_n - 3a_{n-1}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

która w kontekście przykładów rozważanych wcześniej wygląda zaskakująco. Jednak fakt, iż w jej poprzedniku liniowa kombinacja ciągów nie jest po prostu różnicą, ma kluczowe znaczenie: ta implikacja rzeczywiście jest prawdziwa. Stanowi to szczególny przypadek następującego twierdzenia, które – gdy się nad nim chwilę zastanowić – okazuje się wcale nie tak podejrzane.

Twierdzenie. *Jeśli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma tę własność, że dla pewnego α z przedziału $(-1,1)$ granica*

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - \alpha a_n) \tag{1}$$

istnieje i jest równa zero, to również

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dla $|\alpha| \geqslant 1$ opisana wyżej implikacja nie jest prawdziwa.

Rozwiązanie zadania M 1677.
Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Zauważmy, że trójkąty ACI oraz IPA są przystające ($AC = AP$, $\sphericalangle PAI = \sphericalangle IAC$, AI – bok wspólny). Zatem

$$\sphericalangle IPC = \sphericalangle ACI = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Podobnie

$$\sphericalangle PQI = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB,$$

więc trójkąt QIP jest równoramienny, a to oznacza, że I leży na symetralnej odcinka PQ. Punkt I również leży na dwusiecznej kąta ACB, więc $I \equiv R$! Zatem

$$\sphericalangle PRQ = \sphericalangle PIQ = 180^\circ - 2\sphericalangle API = 180^\circ - \sphericalangle ACB.$$

Rozwiązanie zadania M 1676.
Załóżmy, że każdemu z członków koła znanych jest nie więcej niż pięć osób. Wtedy pojawi się członek koła, który ma nie więcej niż czterech znajomych (nie ma grupy 49 osób, z których każda zna dokładnie pięć osób, ponieważ liczba par znajomych w takiej grupie to $(49 \cdot 5)/2$, co jest liczbą niecałkowitą).

Weźmy teraz osobę (nazwijmy ją Ahmed), która ma nie więcej niż 4 znajomych, jego znajomych (nie więcej niż czterech) i ich znajomych (nie więcej niż 16, ponieważ każdy ze znajomych Ahmeda ma co najwyżej 4 innych znajomych). Usuńmy tę grupę z koła (czyli nie więcej niż 21 osób) i rozważmy jeszcze jedną osobę (powiedzmy Hamzę) z powstałej grupy. Hamza może mieć co najwyżej pięciu znajomych i nie więcej niż 20 znajomych swoich znajomych. Usuńmy również tę grupę z naszego koła (czyli nie więcej niż 26 osób). Ponieważ jest tylko 49 osób, a usunęliśmy nie więcej niż 47, pozostał ktoś inny (niech to będzie Thanna). Wtedy jednak Ahmed, Hamza i Thanna nie znają się i nie mają wspólnych znajomych – sprzeczność.

Dowód. By udowodnić drugą, łatwiejszą część tezy, załóżmy, że mamy dane sytuacji, że S zachowuje odległość lub że jest izometrią). takie α, że $|\alpha| \geqslant 1$. Ciąg zdefiniowany wzorem $a_n \coloneqq \alpha^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest wtedy albo rozbieżny, albo stały i niezerowy, a jednak $a_{n+1} - \alpha a_n = 0$. Ot, i cały kontrprzykład.

W przypadku $|\alpha| < 1$ sytuacja zmienia się dramatycznie, a kluczem do istoty rzeczy jest zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ (poniżej zakładamy, że $\alpha \neq 0$, bo przypadek $\alpha = 0$ jest oczywisty). Jeśli bowiem przyjmiemy $a_0 \coloneqq 0$ i zdefiniujemy

$$c_n \coloneqq a_n - \alpha a_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

to otrzymamy rekurencję

$$a_n = \alpha a_{n-1} + c_n, \tag{3}$$

spełnioną dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, która prowadzi do równości

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{n-i} c_i, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Specjaliści zauważą, że mamy tu do czynienia z czymś w rodzaju splotu ciągu $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ze zbieżnym do zera ciągiem $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Z zależnością (4) w ręku dowód prowadzimy już przebojem: mając dane $\epsilon > 0$, znajdujemy k tak duże, by dla $i \geqslant k$ zachodziła nierówność $|c_i| < (1 - |\alpha|)\frac{\epsilon}{2}$. Następnie tak dobieramy $n_0 \geqslant k$, że

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{n-i} c_i\right| = |\alpha|^n \left|\sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{-i} c_i\right| < \frac{\epsilon}{2},$$

o ile $n \geqslant n_0$. Dla takich n mamy

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha^{n-i} c_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{n-i} c_i\right| + \sum_{i=k}^{n} |\alpha|^{n-i} |c_i| < \frac{\epsilon}{2} + (1 - |\alpha|)\frac{\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{n-k} |\alpha|^j < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},$$

co oczywiście kończy dowód. □

Powyższy wynik (a dokładniej jego przypadek $|\alpha| < 1$) można również uzyskać, wykorzystując trochę bardziej zaawansowane narzędzia – unikając przy okazji rachunków z epsilonami.

Za podsunięcie pomysłu użycia twierdzenia Stolza autorzy dziękują Michałowi Miśkiewiczowi, członkowi komitetu redakcyjnego *Delty*.

Można użyć na przykład twierdzenia Stolza, które – przypomnijmy – jest ciągowym odpowiednikiem szerzej znanego twierdzenia de l'Hospitala traktującego o funkcjach i pozwala liczyć granice typu $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$, ale – jak widać z naszego przykładu – nie tylko. Mówi ono, że jeśli ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę nieskończoną, a przy tym rośnie, to z istnienia $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}$ wynika istnienie $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ oraz równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}.$$

Nawiasem mówiąc, przyjmując $v_n \coloneqq n$, otrzymujemy z twierdzenia Stolza wspomnianą wyżej implikację $\lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = g \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = g$.

Wracając jednak do naszego głównego twierdzenia w przypadku $|\alpha| < 1$, zauważmy, że przy jego założeniach ciąg $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dany wzorem $v_n \coloneqq |\alpha|^{-n}$ rośnie do nieskończoności. Równocześnie przyjmując $u_n \coloneqq \alpha^{-n} a_n$, mamy

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \left(\frac{|\alpha|}{\alpha}\right)^{n+1} \frac{a_{n+1} - \alpha a_n}{|\alpha| - 1}.$$

Skoro już wiemy, że nasze **twierdzenie** da się wywnioskować z twierdzenia Stolza, warto się zastanowić, czy tego drugiego nie da się jakimś sprytnym sposobem wywnioskować z pierwszego. Analiza dowodu twierdzenia Stolza podanego w podręczniku Fichtenholza (tom 1, str. 55) potwierdza przypuszczenie, że te wyniki są pokrewne. Czy ktoś to potrafi udowodnić?

Gdy $n \to \infty$, prawa strona tej równości dąży z założenia do 0, bo $\frac{|\alpha|}{\alpha}$ to albo 1, albo -1 (patrz też niżej – mamy tu do czynienia z ciągiem ograniczonym). Twierdzenie Stolza pozwala zatem stwierdzić, że $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|\alpha|}{\alpha}\right)^n a_n = 0$, co implikuje też tezę naszego twierdzenia.

Trzeci dowód, który chcemy tu przedstawić, wykorzystuje twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Jest on równie krótki jak poprzedni, a jego podstawową zaletą jest to, że pozwala Czytelnikowi oderwać się od strony rachunkowej, a zajrzeć na chwilę do skarbca współczesnej matematyki – choćby nieformalnie poznać pojęcie przestrzeni Banacha.

By dowód ten, a przede wszystkim to pojęcie, zrozumieć, trzeba zmienić perspektywę: zamiast myśleć o tym, jak umiejętnie żonglować wzorami opisującymi interesujący nas ciąg, wyobrażamy sobie raczej zbiór, oznaczany standardowo c_0, złożony ze wszystkich ciągów $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, które dążą do zera:

$$\mathsf{c}_0 = \left\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}.$$

A nie jest to zbiór pospolity.

Po pierwsze, jego elementy możemy w naturalny sposób dodawać i odejmować, tak jak to opisaliśmy wyżej. Możemy je też mnożyć przez liczby (zwane w takim kontekście skalarami), o tak: $t\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Co ważne, okazuje się, że opisane tu działania niczym istotnym nie różnią się od operacji, które wykonujemy na wektorach na płaszczyźnie czy w przestrzeni trójwymiarowej. Z tego względu o c_0 mówi się, że jest przestrzenią wektorową (lub liniową).

Za tym stwierdzeniem ukryte jest pewne elementarne twierdzenie o granicach. Jakie?

Po drugie, podobnie jak w przypadku wektorów na płaszczyźnie i w przestrzeni, elementom c_0 można przyporządkować też długość, nazywaną fachowo normą:

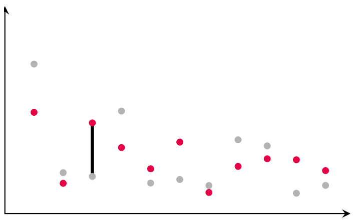
$$\|\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\| \coloneqq \text{długość } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq \sup_{n\geqslant 1} |x_n|, \tag{5}$$

Czytelnik może pamiętać, że wektory na płaszczyźnie, to jest w przestrzeni wymiaru dwa, można utożsamiać z parami (x_1, x_2) liczb, a te z przestrzeni z trójkami (x_1, x_2, x_3). Przestrzeń ciągów ma nieskończenie wiele wymiarów, bo jej elementy, które wyobrażamy sobie tak: $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, mają nieskończenie wiele współrzędnych.

i znów okazuje się, że posługiwać się nią można tak samo jak w skończonej liczbie wymiarów. (Swoją drogą, wyrażenie po prawej stronie to w istocie największa z wartości $|x_1|, |x_2|, \ldots$, a to, że taka największa wartość istnieje i jest skończona, można sprawdzić elementarnie, czyli samemu.) W szczególności dla wszystkich wektorów $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi nierówność

$$\|\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\| \leqslant \|\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\| + \|\,\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\|, \tag{6}$$

która pozwala myśleć o $\|\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} - \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\|$ jako o odległości między ciągami $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.



Na szaro zaznaczono początkowe wyrazy ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a kolorem czerwonym wyrazy ciągu $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Odległość między tymi ciągami jest równa długości najdłuższego odcinka łączącego punkty o jednakowych odciętych. W tym przypadku będzie to zaznaczony pionowy odcinek.

Czytelnik, który oczekuje na obiecany widok skarbca, jest może na razie (i słusznie) zawiedziony. Bardziej niż istnienie normy w c_0 zapewne zdziwi go informacja, że w niektórych przestrzeniach wektorowych takiej normy sensownie zdefiniować się nie da. Ale *clou* czeka tuż za rogiem, oczywiste bynajmniej nie jest, i brzmi:

$$\boxed{\text{długość ze wzoru (5) pasuje do } \mathsf{c}_0 \text{ jak ulał!}}$$

Jak rękawiczka do ręki, jak do nogi dobrze dopasowany mokasyn.

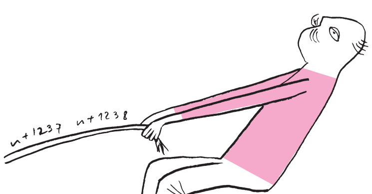
Znaczy to tyle, że zupełnie sensownych norm w c_0 zdefiniować można wiele, ale żadna z nich (chyba że jest normą (5) w jakimś przebraniu) nie opisuje tej przestrzeni dobrze. Na przykład moglibyśmy chcieć przyjąć

$$\|\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\| = |x_1| + |x_2| + \ldots,$$

ale wtedy wiele ciągów, w tym ciąg harmoniczny $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, o którym wspomnieliśmy wyżej, miałby długość nieskończoną. Ta norma, jak źle dobrany but, byłaby za ciasna. Podobne problemy wystąpią, gdybyśmy, idąc za przykładem przestrzeni znanych ze szkoły średniej, zdefiniowali

$$\|\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots}$$

Ten pantofelek pasuje na stopę innej dziewczyny, która nazywa się ℓ^2 i króluje w fizyce. Z drugiej strony, można by na przykład chcieć używać



$$\|\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\| = \frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2^2}|x_2| + \ldots + \frac{1}{2^n}|x_n| + \ldots$$

Wtedy wszystkie wektory miałyby skończone długości, ale okazuje się, że wędrując po c_0 z pomocą tej normy, napotykalibyśmy tu i ówdzie obiekty jej obce, takie jak ciąg złożony z samych jedynek, którego granicą nie jest przecież zero, albo ten składający się z jedynek i minus jedynek na przemian, który granicy, o zgrozo, nie ma żadnej: but byłby zbyt luźny.

Powtórzmy to raz jeszcze. Tylko norma ze wzoru (5) jest złotym środkiem, strzałem w dziesiątkę. Nie ma żadnej innej, która pasowałaby do c_0 tak jak ta, nie ma żadnej innej, która by tak dobrze c_0 opisywała. To stwierdzenie głębokie i ważne: na pewno głębsze niż nasze główne twierdzenie. I – trzeba to podkreślić – nie chodzi o to tylko, by norma spełniała nierówności takie jak (6). W szczególności, poniższe twierdzenie Banacha przestaje być prawdziwe, jeśli zamiast normy z (5) użyjemy normy innej, niewłaściwej – omawiany w nim punkt stały mógłby bowiem „wyjść” z przestrzeni.

O twierdzeniu Banacha można również przeczytać w artykułach J. Górnickiego w Δ^2_{14} i Δ^6_{20}.

Twierdzenie (Banach). Jeżeli $T\colon \mathsf{c}_0 \to \mathsf{c}_0$ jest odwzorowaniem zwężającym, to znaczy jeśli

$$\|T(x) - T(y)\| \leqslant q\|x - y\|, \quad x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{c}_0$$

dla pewnego $q \in [0, 1)$, to istnieje dokładnie jeden element $\widetilde{x} \in \mathsf{c}_0$, zwany punktem stałym, spełniający równość $T(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$.

Zbiór c_0 jest przykładem przestrzeni Banacha, to znaczy przestrzeni wektorowej z „dobrze dobraną” normą. Twierdzenie Banacha jest prawdziwe w każdej takiej przestrzeni i w jeszcze szerszej klasie przestrzeni metrycznych zupełnych. Formalna definicja zupełności nie jest zbyt skomplikowana, choć raczej techniczna, ale droga od niej do opisanych tu intuicji (i z powrotem) wymaga pewnego obycia.

Trzeci dowód głównego twierdzenia. Niech odwzorowanie $S\colon \mathsf{c}_0 \to \mathsf{c}_0$ przesuwa wyrazy ciągu o jeden w prawo. Innymi słowy:

$$S(x) = S\big((x_1, x_2, x_3, \ldots)\big) = (0, x_1, x_2, \ldots), \qquad x \in \mathsf{c}_0.$$

Rozwiązanie zadania M 1675.
Na tablicy pozostają tylko liczby złożone, a ich czynniki pierwsze mieszczą się w zakresie od 101 do 999 lub od 10 001 do 1 000 000. Jednakże żadna z pozostałych liczb nie może być równa iloczynowi trzech lub więcej liczb pierwszych w tych zakresach, ponieważ w tym przypadku iloczyn wynosiłby więcej niż $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$. Oznacza to, że wszystkie pozostałe liczby są podzielne przez dokładnie dwa czynniki pierwsze w rozważanych zakresach. Ale wtedy liczby pierwsze muszą należeć do przedziału [101,999), w przeciwnym razie iloczyn jest większy niż $100 \cdot 10\,000 = 1\,000\,000$. Ostatecznie iloczyn dowolnych dwóch liczb pierwszych z przedziału [101,999) (włączając kwadraty liczb pierwszych) nie przekracza $999 \cdot 999 < 1\,000\,000$ i dlatego pozostaje na tablicy. Więc jeśli p_1, p_2, …, p_k jest listą wszystkich liczb pierwszych od 101 do 999, to na tablicy zostają:

$$\begin{array}{ccccc} p_1p_1, & p_1p_2, & p_1p_3, & \ldots, & p_1p_k \\ & p_2p_2, & p_2p_3, & \ldots, & p_2p_k \\ & & p_3p_3, & \ldots, & p_3p_k \end{array}$$

których iloczyn wynosi $(p_1p_2\ldots p_k)^{k+1}$.

Zauważmy, że $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$ (mówimy w tej sytuacji, że S zachowuje odległość lub że jest izometrią). Następnie, mając dany ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający warunek (1), zdefiniujmy odwzorowanie $T\colon \mathsf{c}_0 \to \mathsf{c}_0$ wzorem

$$T(x) = \alpha S(x) + c = (c_1, \alpha x_1 + c_2, \alpha x_2 + c_3, \ldots), \qquad x \in \mathsf{c}_0,$$

w którym ciąg $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{c}_0$ zadany jest przez (2). Dla dowolnych $x, y \in \mathsf{c}_0$ otrzymamy $\|T(x) - T(y)\| = |\alpha|\|S(x) - S(y)\| = |\alpha|\|x - y\|$, co dowodzi, że odwzorowanie T jest zwężające (z $q = |\alpha| < 1$). Z twierdzenia Banacha wynika zatem, że istnieje dokładnie jeden element $\widetilde{x} = \{\widetilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ przestrzeni c_0, dla którego $\widetilde{x} = T(\widetilde{x})$. Ostatnia równość jest równoważna temu, że $\widetilde{x}_1 = 0 + a_1 - \alpha a_0 = a_1$ oraz

$$\widetilde{x}_n = \alpha\widetilde{x}_{n-1} + c_n, \qquad n \geqslant 2.$$

Wobec (3) pokazuje to, że ciągi $\{\widetilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełniają tę samą zależność rekurencyjną, a to z kolei, w połączeniu z faktem, że $\widetilde{x}_1 = a_1$, implikuje ich równość. Skoro jednak $\widetilde{x}$ należy do c_0, to do tej samej przestrzeni należy również nasz wyjściowy ciąg, co oznacza, że jego granica istnieje i jest równa zero. To kończy nasze trzecie rozumowanie.

Na koniec zanotujmy, że tytułowe twierdzenie można uogólniać: na przykład α może zależeć od n, granica w (1) nie musi też być zerem. W poniższym wniosku zajmujemy się pierwszym z tych dwóch przypadków, zostawiając przyjemność łamania sobie głowy nad drugim wygimnastykowanemu Czytelnikowi.

Wniosek. *Jeżeli $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zbieżnym do liczby z przedziału $(-1, 1)$, a ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma tę własność, że granica*

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - \alpha_n a_n)$$

istnieje i jest równa zero, to sam $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ też zbiega do zera.

Przypomnijmy, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ograniczonym, jeśli istnieje taka liczba M, że dla wszystkich naturalnych n zachodzi nierówność $|a_n| \leqslant M$.

W dowodzie wniosku skorzystaliśmy ze znanego twierdzenia mówiącego, że granicą iloczynu ciągu ograniczonego i ciągu dążącego do zera jest zero.

Dowód. Jeśli się wie, że z przyjętego wyżej założenia wynika ograniczoność ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, to dowód jest bardzo prosty. Łatwa do sprawdzenia tożsamość

$$a_{n+1} - \alpha_n a_n = (a_{n+1} - \alpha_0 a_n) + (\alpha_0 - \alpha_n)a_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

w której α_0 jest granicą ciągu $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, prowadzi bowiem natychmiast do wniosku, że $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - \alpha_n a_n) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - \alpha_0 a_n) = 0$, co pozwala otrzymać tezę z wersji twierdzenia udowodnionej wcześniej.

Pozostało nam wykazać, że $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Przedstawimy na to dwa dowody. Pierwszy z nich zaczyna się od spostrzeżenia, że gdyby ciąg ten ograniczony nie był, to istniałby jego podciąg $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że

$$|a_{n_k+1}| \geqslant \max\{1, |a_{n_k}|\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $|\alpha_{n_k}| < 1 - \delta$ dla pewnego $\delta \in (0, 1)$ i wszystkich odpowiednio dużych $k \in \mathbb{N}$, więc dla takich k mielibyśmy

$$\begin{aligned} |a_{n_k+1} - \alpha_{n_k} a_{n_k}| &\geqslant \max\{1, |a_{n_k}|\} - |\alpha_{n_k}||a_{n_k}| \geqslant \\ &\geqslant \max\{1, |a_{n_k}|\}(1 - |\alpha_{n_k}|) \geqslant 1 - |\alpha_{n_k}| > \delta. \end{aligned}$$

Przeczy to jednak temu, że ciąg $\{a_{n_k+1} - \alpha_{n_k} a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, będący podciągiem ciągu $\{a_{n+1} - \alpha_n a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, zbiega do zera. Sprzeczność ta dowodzi, że nasz ciąg jest ograniczony.

Dowód drugi jest bardziej bezpośredni. Niech β będzie liczbą z przedziału otwartego o końcach $|\alpha_0|$ i 1. Z założenia wiemy, że istnieje taka liczba naturalna k, że nierówności

$$|\alpha_n| \leqslant \beta \qquad \text{i} \qquad |a_{n+1} - \alpha_n a_n| \leqslant 1 - \beta$$

zachodzą dla wszystkich $n \geqslant k$. Dla takich n zatem

$$|a_{n+1}| = |\alpha_n a_n + a_{n+1} - \alpha_n a_n| \leqslant \beta|a_n| + 1 - \beta.$$

Z tej zależności można już, poprzez rozumowanie indukcyjne, łatwo wywnioskować, że $|a_n|$ nie przekracza największej z liczb $1, |a_1|, \ldots, |a_k|$, o ile tylko $n \geqslant k$. To zaś dowodzi ponownie, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. □

Teraz, gdy nasze – udowodnione na trzy sposoby – twierdzenie przestało być podejrzane, chyba warto je zapamiętać, choćby jako kryterium zbieżności ciągów.
Z jego pomocą można na przykład, stosując indukcję względem k, bezboleśnie dowieść, że $\lim_{n\to\infty} n^k\alpha^n = 0$ dla każdego naturalnego k i każdego α z przedziału $(-1, 1)$. Na pewno jednak znacznie ważniejsze jest, by zapamiętać, przynajmniej intuicyjnie, co to jest przestrzeń Banacha.