

# Klub 44 F



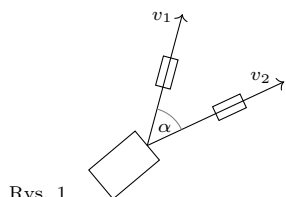
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

## Rozwiązania zadań z numeru 3/2021

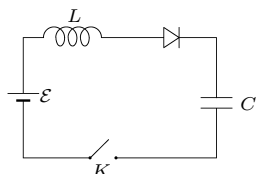
Przypominamy treść zadań:

**714.** Ciężka skrzynia przesuwana jest przy pomocy dwóch traktorów, które poruszają się z prędkościami  $v_1$  i  $v_2$ , między którymi jest kąt  $\alpha$  (rys. 1). Jak jest skierowany i jaką ma wartość wektor prędkości skrzyni w chwili, gdy liny są równoległe do wektorów  $v_1$  i  $v_2$ ?

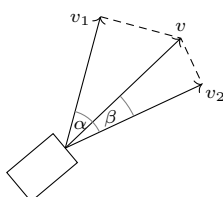
**715.** Do jakiego napięcia naładuje się kondensator o pojemności  $C$  po zamknięciu klucza  $K$  w obwodzie przedstawionym na rysunku 2? Jaka będzie maksymalna wartość natężenia prądu podczas ładowania? Siła elektromotoryczna baterii wynosi  $\mathcal{E}$ , opór wewnętrzny baterii i opory przewodów łączących są zaniedbywalne. Dioda jest idealna – w kierunku przewodzenia ma opór zerowy, a w kierunku zaporowym jej opór jest nieskończenie wielki. Indukcyjność cewki  $L$  jest na tyle duża, że proces ładowania jest powolny.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

**714.** Liny są nierozciągliwe, więc rzut prostopadły wektora prędkości skrzyni  $v$  na kierunek pierwszej liny ma wartość  $v_1$ , a na kierunek drugiej  $v_2$ . Wektory  $v_1$  i  $v_2$  są składowymi prędkości skrzyni, ale z różnych rozkładów na kierunki prostopadłe. Koniec wektora  $v$  znajduje się na przecięciu prostokątów do lin, wystawionych z końców wektorów  $v_1$  i  $v_2$  (rys. 3). Z rysunku widać, że  $v_1 = v \cos(\alpha - \beta)$  oraz  $v_2 = v \cos \beta$ . Stąd

$$v_2/v_1 = \cos \beta / (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 1 / (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta),$$

$$\operatorname{tg} \beta = v_1 / (v_2 \sin \alpha) - \operatorname{ctg} \alpha.$$

Wartość wektora prędkości skrzyni dana jest wzorem

$$v = v_2 / \cos \beta = v_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

**715.** Oznaczmy przez  $Q_{\max}$  maksymalny ładunek na kondensatorze po zakończeniu procesu ładowania. Praca źródła prądu równa jest energii pola elektrycznego wewnątrz kondensatora

$$\mathcal{E}Q_{\max} = Q_{\max}^2 / 2C, \quad \text{stąd } Q_{\max} = 2C\mathcal{E}.$$

Maksymalna wartość napięcia, do jakiego naładuje się kondensator,  $U = 2\mathcal{E}$ .

Drugie prawo Kirchhoffa dla badanego obwodu ma postać

$$(*) \quad \mathcal{E} - LdI/dt - Q/C = 0.$$

Gdy natężenie prądu jest maksymalne  $I = I_{\max}$ , jego pochodna po czasie znika i ładunek na kondensatorze  $Q = C\mathcal{E}$ . Z zasady zachowania energii mamy wtedy

$$\mathcal{E}Q = LI_{\max}^2 / 2 + Q^2 / 2C.$$

Stąd

$$I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{C/L}.$$

Możemy też znaleźć zależność od czasu natężenia prądu w obwodzie i ładunku na kondensatorze. Różniczkując równanie (\*) po czasie otrzymujemy

$$d^2I/dt^2 + I/LC = 0.$$

Rozwiązanie tego równania po uwzględnieniu, że  $I(0) = 0$ , ma postać

$$I = I_{\max} \sin \omega t, \quad \text{gdzie } \omega = 1/\sqrt{LC}.$$

Ładunek na kondensatorze

$$Q = -(I_{\max}/\omega) \cos \omega t + I_{\max}/\omega,$$

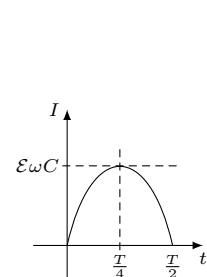
bo  $Q(0) = 0$ . Podstawiając  $I$  oraz  $Q$  do równania (\*), które musi być spełnione w każdej chwili czasu, otrzymujemy

$$I_{\max} = \mathcal{E}\omega C = \mathcal{E} \sqrt{C/L}, \quad Q_{\max} = 2I_{\max}/\omega = 2\mathcal{E}C.$$

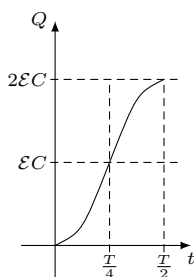
Zależność natężenia prądu w obwodzie i ładunku na kondensatorze od czasu ilustrują rysunki 4a i 4b.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 706 ( $WT = 2,6$ ), 707 ( $WT = 1,67$ ), 708 ( $WT = 2,36$ ) i 709 ( $WT = 1,65$ ) z numerów 11/2020 i 12/2020

Tomasz Wietecha	Tarnów	15	– 45,27
Jan Zambrzycki	Białystok	3	– 44,89
Michał Koźlik	Gliwice	4	– 42,82
Tomasz Rudny	Poznań		41,38
Konrad Kapcia	Poznań	1	– 33,63
Piotr Adamczyk	Warszawa		33,44
Paweł Perkowski	Ożarów	3	– 32,26
Ryszard Woźniak	Kraków		31,46
Jacek Konieczny	Poznań		31,33
Sławomir Buć	Mystków		29,75



Rys. 4a



Rys. 4b

### Skrot regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).