

Czy Wszechświat jest skończony?

Marek BIESIADA *

* Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Gdyby nieskończony w czasie i przestrzeni Wszechświat był jednorodnie wypełniony gwiazdami – nocne niebo nie mogłoby być ciemne! Opisuje to Paradoxs Olbersa, o którym pisaliśmy jeszcze w XX wieku: *Dlaczego niebo jest ciemne?*, Δ_{1976}^{07} .

Czym jest Wszechświat? Od momentu powstania ogólnej teorii względności pytania dotyczące Wszechświata możemy formułować jako pytania dotyczące globalnej struktury czasoprzestrzeni. Czasoprzestrzeń to arena zdarzeń fizyki – wszystko dzieje się w czasie i przestrzeni (klasycznie zdarzenia te opisują równania dynamiki – mechaniki lub elektrodynamiki). Gdy w wieku XVII (za sprawą Galileusza i Newtona) narodziła się współczesna fizyka, do opisu Wszechświata przydatny okazał się kartezjański obraz przestrzeni euklidesowej, wewnątrz której można śledzić w czasie ruch i ewolucję ciał dyktowaną prawami dynamiki (np. rzuconego kamienia, ale też planet i gwiazd). W ramach takiego opisu zakładano milcząco, że arena zdarzeń – przestrzeń umiejscawiająca zdarzenia, oraz niezależnie płynący czas – rozciągają się w nieskończoność.

Globalna struktura czasoprzestrzeni

Teoria względności przyniosła radykalne zmiany. Po pierwsze czas i przestrzeń przestały być rozdzielone – okazało się, że tworzą czterowymiarową czasoprzestrzeń. Po drugie czasoprzestrzeń przestała być sztywną areną zdarzeń, lecz zaczęła uczestniczyć w „grze”. W myśl równań Einsteina energia (czyli również masa, $E = mc^2$) oraz jej przepływy determinują geometrię (ściślej, krzywiznę) czasoprzestrzeni. Z drugiej strony zakrzywiona czasoprzestrzeń mówi materii, jak się ma poruszać: ruchy swobodne nie są już liniami prostymi, a tzw. geodezyjnymi, czyli ich analogami w przestrzeniach zakrzywionych. W związku z tym istnieje intymny związek między materią i geometrią czasoprzestrzeni.

Kosmologia jednorodnego izotropowego Wszechświata

Rozważając strukturę czasoprzestrzeni w największych skalach (całego Wszechświata), zakładamy, że Wszechświat wygląda tak samo dla każdego obserwatora będącego w ruchu swobodnym, czyli jest jednorodny i izotropowy (tzw. zasada kopernikańska). Metrykę opisującą taki Wszechświat nazywamy metryką Friedmana–Lemaître’a–Robertsona–Walkera (FLRW). Występuje w niej tzw. czynnik skali $a(t)$, zależny od wyróżnionego czasu kosmicznego t . Dodatkowo metryka FLRW zakłada istnienie krzywizny przestrzennego sektora czasoprzestrzeni Σ_t (czyli przestrzeni stałego czasu t), która parametryzowana jest pewnym dyskretnym indeksem $k \in \{+1, 0, -1\}$. Opisuje on odpowiednio: 3-wymiarową sferę \mathbb{S}^3 ($k = +1$), przestrzeń euklidesową \mathbb{E}^3 ($k = 0$) oraz przestrzeń hiperboliczną \mathbb{H}^3 ($k = -1$). Niestety obserwacyjnie nie jesteśmy w stanie z całą pewnością rozstrzygnąć, czy indeks krzywizny naszego Wszechświata jest równy $+1$, 0 bądź -1 . Czynnik skali $a(t)$ występujący w metryce FLRW zmienia się w czasie, a ponieważ skaluje on wszelkie rozmiary przestrzenne, wynikają stąd m.in. obserwowane rozszerzanie się Wszechświata oraz przesunięcia ku czerwieni widm odległych obiektów. Występująca w metryce odległość współporuszająca r nie jest obserwowalna (opisuje ona odległość współrzędnościową do innego obserwatora będącego w ruchu swobodnym, przy zaniedbaniu ruchów wynikających ze wzajemnych oddziaływań między obserwatorami). Chcąc wyznaczyć bardziej intuicyjną dla nas odległość, odzwierciedlającą w danej chwili t pomiar wykonany taśmą mierniczą np. do galaktyki w Andromedzie, używamy tzw. odległości własnej $d(t)$, zależnej od czynnika skali: $d(t) = a(t)r$. Ze względu na czynnik $a(t)$ odległość własna zmienia się w czasie wraz z ekspansją Wszechświata.

Skończoność przestrzenna i czasowa

Czy w takim razie nasz Wszechświat jest skończony? Jaki ma kształt? Z przedstawionej powyżej metryki FLRW tylko przypadek opisujący hipersferę \mathbb{S}^3 ($k = +1$) reprezentuje skończony przestrzennie Wszechświat, pozostałe – nie. W jaki jednak sposób możemy określić wartość parametru k ? W tym celu pozostaniemy przy tej samej metryce, ale skupimy się na wynikającym z niej bezwymiarowym parametrze $\Omega = \rho/\rho_{kr}$, w którym ρ jest całkowitą gęstością energii materialnej zawartości Wszechświata, zaś ρ_{kr} jest gęstością krytyczną.

Metryka FLRW zapisana w sferycznym układzie współrzędnych (t, r, θ, φ) wygląda następująco:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right).$$

W równaniu tym $a(t)$ jest czynnikiem skali, k jest indeksem krzywizny, r jest odległością współporuszającą się, natomiast $d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ jest elementem liniowym dla sfery \mathbb{S}^2 .

Wartość gęstości krytycznej $\rho_{kr} = (3H_0^2)/(8\pi G)$ jest rzędu $10^{-29} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, co odpowiada kilku atomom wodoru w metrze sześciennym. We wzorze na ρ_{kr} znajdziemy parametr H_0 , czyli stałą Hubble’a, oraz stałą grawitacji G .

Parametr ρ_{kr} zależy od wartości stałej Hubble’a (czyli obecnego tempa ekspansji Wszechświata), dlatego dokładny pomiar tej wielkości może rzucić światło na wartość zarówno ρ_{kr} , Ω , jak i ostatecznie na wartość indeksu k . Zależność pomiędzy Ω i k można opisać jako: $k = +1$ dla $\Omega > 1$, $k = 0$ dla $\Omega = 1$ oraz $k = -1$ dla $\Omega < 1$. Przez długi czas obserwacje sugerowały wartość parametru Ω mniejszą od jedności ($k = -1$, \mathbb{H}^3 , tzw. Wszechświat otwarty). Niezwykle precyzyjne obserwacje anizotropii kosmicznego promieniowania tła pokazały, że ewentualne odstępstwo wartości Ω od 1 jest bardzo niewielkie: $\Omega = 1,003 \pm 0,015$. Pomiar ten oznacza, że Wszechświat jest zapewne przestrzenią płaską, $\Sigma_t = \mathbb{E}^3$ (a zatem najprawdopodobniej nieskończony przestrzennie). Jednak nawet taki płaski Wszechświat może charakteryzować się nietrywialną topologią (o czym więcej w ostatniej części moich rozważań). Dlatego też wciąż trwają badania mające potwierdzić lub podważyć aktualną interpretację otrzymanych wyników.

Ale czy również jest nieskończony czasowo? Równania Einsteina jednoznacznie wskazują na to, że Wszechświat miał początek w osobliwości początkowej, a jego ewolucja czasowa opisywana jest przez wspomnianą tu wielokrotnie funkcję $a(t)$. Jej dokładna postać zależy od gęstości energii składników materialnych Wszechświata: promieniowania, materii, stałej kosmologicznej (oraz od parametru krzywizny k), gdyż w różny sposób wpływają one na tempo ekspansji. Wszechświat zamknięty miałby swój początek i koniec w czasie, a zatem miałby skończony czas istnienia. Wszechświaty: płaski i otwarty powinny ekspandować w nieskończoność.

Osobliwość kosmologiczna jest typową własnością klasycznej ogólnej teorii względności, w myśl twierdzenia Hawkinga–Penrose’a. Nie jest to zatem produkt uboczny założeń jednorodności i izotropii omawianych tu kosmologii. Sir Roger Penrose za twierdzenia o osobliwościach otrzymał Nagrodę Nobla z Fizyki za rok 2020 (Δ_{20}^{12}).

Horyzonty

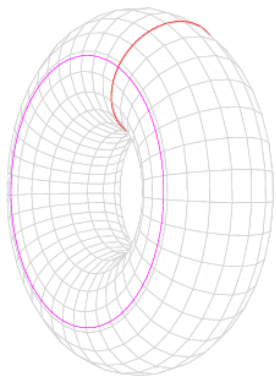
Wiedząc już, że Wszechświat jest nieskończony przestrzennie, ale ma skończony wiek (równy obecnie $\approx 14 \times 10^9$ lat), możemy postawić pytanie: jak duży jest obszar Wszechświata dostępny naszym obserwacjom? W tym celu wprowadzimy pojęcie stożka światła przeszłości, który wyznacza obszar czasoprzestrzeni, z którego mają szansę dotrzeć do nas sygnały: cząstki, a w szczególności fotony bądź fale grawitacyjne biegnące po jego powierzchni.

Nawiązujemy tu do obrazowych opisów stożka światła (rysunków), w których jeden wymiar przestrzenny jest pominięty. W czasoprzestrzeni 4-wymiarowej „powierzchnią” stożka jest wnętrze sfery o środku w obserwatorze. Wnętrze stożka to odpowiedni obszar czasoprzestrzeni.

W przypadku Wszechświata, jaki znamy, metryka FLWR wyznacza pewien promień $r_{\max}(t)$ określający skończony obszar przestrzenny Wszechświata (nieskończonego przestrzennie) dostępny obserwacjom w chwili t (jest to tzw. horyzont cząstek). Promień ten w metryce FLWR rośnie z czasem. Jest on jednak ograniczony ze względu na historię naszego Wszechświata. Ponieważ przed epoką oddzielenia się promieniowania od materii w chwili $t_{dec} \approx 380\,000$ lat (sygnałem pochodzącym z tej epoki jest kosmiczne promieniowanie tła) Wszechświat był nieprzezroczysty, obszar faktycznie dostępny obserwacjom elektromagnetycznym jest nieco mniejszy niż teoretycznie wyznaczony $r_{\max}(t)$. Nie wchodząc w dalsze szczegółowe rozważania, można także określić maksymalny rozmiar przestrzenny dostępny poznaniu kiedykolwiek (tj. w najodleglejszej przyszłości), tzw. horyzont zdarzeń. W świetle obserwowanej przyspieszającej ekspansji Wszechświata możemy sądzić, że horyzont zdarzeń istnieje.

Jaki jest kształt Wszechświata?

Równania Einsteina określają jedynie lokalną geometrię czasoprzestrzeni – jej metrykę, natomiast nie mówią one nic o samej topologii przestrzeni. Dobrą ilustracją jest przykład dwuwymiarowy. W dwuwymiarowej przestrzeni płaska metryka może lokalnie opisywać zarówno geometrię płaszczyzny \mathbb{E}^2 , jak i walca czy torusa \mathbb{T}^2 . Płaszczyzna \mathbb{E}^2 jest tzw. płaszczyzną jednopójną, czyli, krótko mówiąc, wszystkie krzywe zamknięte na płaszczyźnie (tzw. pętle) można ściągnąć do jednego punktu znajdującego się w obszarze danej płaszczyzny. Jednak walec i torus nie są jedno-, lecz wielospójne – obok pętli, które można ściągnąć do jednego punktu, istnieją tam dodatkowe pętle, dla których jest to niemożliwe (np. wokół osi walca czy też na torusie – zobacz rysunek na marginesie). Ta „niemoc” spowodowana jest topologią, czyli „kształtem” rozważanego obiektu. Dobrą ilustracją jest łapanie konia na lasso: gdy nie uda się zarzucić lassa na cel (pozostajemy w \mathbb{E}^3), pętla ściągnie się do



Torus nie jest jednopójny, gdyż żadna z zaznaczonych pętli nie może być ściągnięta do punktu znajdującego się na powierzchni torusa (za Wikipedią)

punktu, natomiast przy udanym rzucie przeszkodą stanie się szyja mustanga, topologicznie równoważna walcowi. Jakby tego było mało, mimo iż geometrycznie torus \mathbb{T}^2 ma taką samą metrykę jak płaskość \mathbb{E}^2 , jest on dodatkowo skończony. Badając te wielospójne przestrzenie płaskie, możemy nawiązać do archetypu, czyli \mathbb{E}^2 .

Poćwiczmy trochę naszą wyobraźnię. Skonstruujmy \mathbb{T}^2 , biorąc odpowiedni prostokąt o bokach L_1 i L_2 oraz identyfikując (sklejając) naprzeciwległe boki. Prostokąt (zwany obszarem fundamentalnym torusa) jest podzbiorem \mathbb{E}^2 . Możemy sobie dalej wyobrazić płaszczyznę \mathbb{E}^2 całkowicie „wykafelkowaną” takimi prostokątami. Pamiętając o utożsamieniach boków, proste w \mathbb{E}^2 odtworzą nam krzywe geodezyjne na \mathbb{T}^2 – opuszczając obszar fundamentalny, prosta wchodząca do jego kopii obrazuje geodezyjną pojawiającą się z kierunku antypodalnego (czyli po obiegnięciu torusa). Proste przecinające kolejne kopie obrazują wielokrotne obiegi torusa.

Powyższe intuicyjnie opisane konstrukcje możemy uściślić. Nazwijmy płaszczyznę przestrzenią uniwersalną nakrywającą torusa. Analogiem trójwymiarowym jest torus \mathbb{T}^3 i powyższą konstrukcję wyobrazić sobie można jako gabinet luster – obszar fundamentalny to prostopadłościan (rozpięty na ortogonalnych wzajemnie wektorach L_1, L_2, L_3) o wszystkich ścianach wyłożonych lustrami. Obserwator widzi nieskończenie wiele kopii samego siebie w przestrzeni \mathbb{E}^3 (przestrzeni nakrywającej). Widzimy zatem, że kuszące jest tu pytanie: czy Wszechświat może mieć nietrywialną topologię (tj. być wielospójny), a płaska przestrzeń

jest jego uniwersalną przestrzenią nakrywającą? Taki płaski przestrzennie Wszechświat miałby skończoną objętość $V_{\text{top}} = a(t)^3 L_1 \cdot (L_2 \times L_3)$ (rosnącą w czasie wraz z ekspansją).

Zauważmy, iż \mathbb{T}^3 nie jest jedynym przykładem płaskiego Wszechświata o nietrywialnej topologii – takich możliwości jest dodatkowo 16 (tzn. nie licząc \mathbb{E}^3 i \mathbb{T}^3). Odpowiadające im dyskretne grupy symetrii (dla \mathbb{T}^3 są to translacje generowane przez wektory L_i ; $i = 1, 2, 3$) są bardziej skomplikowane. Obserwacyjna konfrontacja tych idei jest komplikowana przez ekspansję Wszechświata. Tym niemniej przeprowadzono testy obserwacyjne wielospójnego Wszechświata, w tym w oparciu o dane satelity Planck dotyczące anizotropii kosmicznego promieniowania tła (dla przypadku \mathbb{T}^3), uzyskując wynik negatywny. Wynik ten nie przesądza jednak sprawy, a oznacza jedynie, że jeżeli Wszechświat ma nietrywialną topologię i jest przestrzennie skończony, to rozmiar fundamentalnego prostopadłościanu (o którym była mowa wcześniej) jest większy niż ta część Wszechświata, która jest dostępna naszym obserwacjom, czyli ta znajdująca się wewnątrz horyzontu cząstek. Inaczej mówiąc, nie jesteśmy w stanie odróżnić nieskończonego Wszechświata od takiego skończonego, którego obserwowalną dla nas część mieści się całkowicie w jednym fundamentalnym prostopadłościanie. Podsumowując: jeżeli rozmiar charakterystyczny ($r_{\text{top}} \sim V_{\text{top}}^{1/3}$) Wszechświata płaskiego o nietrywialnej topologii jest większy niż horyzont cząstek, nie możemy się o tym teraz dowiedzieć; w przypadku zaś, gdy jest większy niż horyzont zdarzeń – to nie dowiemy się o tym nigdy...



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1693. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Środki okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC pokrywają się odpowiednio ze środkami okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie ADC . Wiedząc, że $AB = 1$, wyznacz długości pozostałych boków oraz miary kątów czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie na str. 21

M 1694. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, takimi że

$$a_1^2 + 2a_2^3 + \dots + na_n^{n+1} < 1.$$

Udowodnij, że

$$2a_1 + 3a_2^2 + \dots + (n+1)a_n^n < 3.$$

Rozwiązanie na str. 16

M 1695. Czy istnieje liczba całkowita większa niż 1000000, taka że średnia arytmetyczna i geometryczna wszystkich jej dzielników są całkowite?

Rozwiązanie na str. 6

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1037. Po spostrzeżeniu przeszkody kierujący tramwajem rozpoczyna hamowanie. Oszacuj, jak długą drogę pokona tramwaj do całkowitego zatrzymania, jeśli jego początkowa prędkość $v = 50$ km/h. Ile ciepła wydzieli się podczas hamowania? Masa pustego tramwaju $m_0 \approx 16\,500$ kg, średnia liczba pasażerów $n = 50$, współczynnik tarcia stali o stal $\mu_k \approx 0,1$, a przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s².

Rozwiązanie na str. 5

F 1038. Stwierdzono, że długości fal linii widmowych obserwowanych w sygnale pochodzącym z supernowej PS1-11mq są $1 + z = 1,81$ (z jest tzw. przesunięciem ku czerwieni) razy większe niż długości fal odpowiadających im charakterystycznych linii widm atomowych mierzonych na Ziemi. Od chwili rozbłysku tej supernowej rejestrowano także zmiany jej blasku i po czasie $t = 54$ dni zaobserwowano charakterystyczną zmianę w kształcie krzywej zaniku jej jasności. Ile czasu, t_0 , trwały procesy prowadzące do tej zmiany w układzie związanym z supernową?

Rozwiązanie na str. 5