Rozstrzygalność teorii nierówności liniowych

Doc. dr hab. Lesław W. SZCZERBA

W poprzednim numerze omawialiśmy procedurę dowodzenia twierdzeń pewnej teorii. Była to bardzo uboga teoria, mówiła tylko o uporządkowaniu liczb rzeczywistych. Okazuje się jednak, że rozstrzygalne są niektóre bogatsze teorie. Zajmiemy się tu teorią równości i nierówności liniowych. Przypomnijmy najpierw, czym jest forma liniowa. Jest to mianowicie wyrażenie postaci:

$$a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n,$$

gdzie litery $a_0, \ldots, a_n$ są nazwami konkretnych liczb rzeczywistych (nazywamy je współczynnikami), a litery $x_1, \ldots, x_n$ są zmiennymi. Przez równość liniową nazwiemy dwie formy liniowe połączone znakiem równości:

$$a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n = b_0+b_1y_1+\ldots+b_ny_n,$$

a przez nierówność liniową — dwie formy liniowe połączone znakiem nierówności:

$$a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n < b_0+b_1y_1+\ldots+b_ny_n.$$

W obu wyrażeniach niektóre x_i i y_j mogą oznaczać tę samą zmienną. Można zatem na ogół oba wyrażenia uprościć. W każdym razie można je doprowadzić do postaci:

$$a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n = 0$$

lub

$$a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n < 0.$$

W dalszym zatem ciągu wystarczy rozpatrywać tylko takie równości i nierówności. Przez teorię równości i nierówności liniowych w liczbach rzeczywistych rozumiemy tu zbiór tych wszystkich zdań zbudowanych z równości i nierówności liniowych, jako formuł atomicznych, które są prawdziwe dla liczb rzeczywistych. Pokażemy, że teoria równości i nierówności liniowych dla liczb rzeczywistych jest rozstrzygalna. Pokażemy to, podobnie jak poprzednio, metodą eliminacji kwantyfikatorów. Zaczniemy od pokazania, jak wyeliminować kwantyfikator z wyrażeń postaci $\bigvee_x \Phi$, gdzie Φ jest formułą bezkwantyfikatorową. Zupełnie tak samo jak w poprzednim artykule, rozpoczynamy od wyeliminowania implikacji ($\rightarrow$) i równoważności ($\leftrightarrow$) przy pomocy wzorów:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q,$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q).$$

Następnie eliminujemy negację, najpierw przy pomocy praw de Morgana:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q,$$
$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q,$$

oraz prawa:

$$\sim\sim p \equiv p,$$

a potem w następujący sposób: niech α i β będą dowolnymi formami liniowymi, wówczas

$$\sim (\alpha = \beta) \equiv (\alpha < \beta) \vee (\beta < \alpha),$$
$$\sim (\alpha < \beta) \equiv (\alpha = \beta) \vee (\beta < \alpha);$$

z kolei, posługując się łącznością i rozdzielnością koniunkcji i alternatywy, sprowadzamy naszą formułę do postaci:

$$\bigvee_x (\Phi_0 \vee \Phi_1 \vee \ldots \vee \Phi_n),$$

gdzie każde Φ_i jest koniunkcją równości i nierówności liniowych. Wobec prawa

$$\bigvee_x [\Psi_0 \vee \Psi_1] \equiv \bigvee_x \Psi_0 \vee \bigvee_x \Psi_1$$

wystarczy, jeśli wyeliminujemy kwantyfikator w każdej z formuł $\bigvee_x \Phi_i$ z osobna. Wszystkie formuły atomiczne, w których nie występuje zmienna x, możemy od razu wyłączyć przed znak kwantyfikatora. Załóżmy zatem, że wszystkie formuły atomiczne występujące w Φ_i zawierają zmienną x. Jeśli wśród owych formuł jest przynajmniej jedna równość, to musi ona mieć postać

$$ax+\alpha = 0,$$

gdzie a jest liczbą różną od zera, a α pewną formą liniową:

$$\alpha = a_0x_0+\ldots+a_mx_m,$$

w której nie występuje zmienna x. Wówczas

$$x = \frac{\alpha}{-a} = \frac{a_0}{-a}x_0+\ldots+\frac{a_m}{-a}x_m.$$

Przykład $a,b > 0$

$$\bigwedge_x \bigwedge_y [(ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0) \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y \sim [(ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0) \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y \sim [\sim (ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y [\sim\sim (ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0) \wedge \sim (x < 0 \vee y < 0)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y (ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0 \wedge \sim x < 0 \wedge \sim y < 0),$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y [ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0 \wedge (x = 0 \vee 0 < x) \wedge (y = 0 \vee 0 < y)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y [(ax+by+c<0 \wedge bx-ay-c < 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0) \vee (ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0 \wedge x = 0 \wedge 0 < y) \vee (ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0 \wedge 0 < x \wedge y = 0) \vee (ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0 \wedge 0 < x \wedge 0 < y)],$$

$$\bigwedge_x \sim \{[x = 0 \wedge \bigvee_y (ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0 \wedge y = 0)] \vee [x = 0 \wedge \bigvee_y (y < \frac{ax+c}{-b} \wedge y < \frac{bx-c}{a} \wedge 0 < y)] \vee [0 < x \wedge \bigvee_y (ax+by+c < 0 \wedge bx-ay-c < 0 \wedge y = 0)] \vee [0 < x \wedge \bigvee_y (y < \frac{ax+c}{-b} \wedge y < \frac{bx-c}{a} \wedge 0 < y)]\}.$$

$$\bigwedge_x \sim[(x=0 \wedge ax+c<0 \wedge bx-c<0) \wedge$$

$$\vee\ \left(x=0 \wedge \frac{ax+c}{-b}<0 \wedge \frac{bx-c}{a}<0\right) \vee$$

$$\vee\ (0<x \wedge ax+c<0 \wedge bx-c<0) \vee$$

$$\vee\ \left(0<x \wedge \frac{ax+c}{-b}<0 \wedge \frac{bx-c}{a}<0\right)].$$

$$\sim\bigvee_x \sim\sim[(x=0 \wedge ax+c<0 \wedge bx-c<0) \vee$$
$$\vee\ (x=0 \wedge 0<ax+c \wedge bx-c<0) \vee$$
$$\vee\ (0<x \wedge ax+c<0 \wedge bx-c<0) \vee$$
$$\vee\ (0<x \wedge 0<ax+c \wedge bx-c<0)],$$

$$\sim\Big[\bigvee_x (x=0 \wedge ax+c<0 \wedge bx-c<0) \vee$$

$$\vee \bigvee_x (x=0 \wedge 0<ax+c \wedge bx-c<0) \vee$$

$$\vee \bigvee_x \left(0<x \wedge \frac{-c}{a}<x \wedge x<\frac{c}{a}\right) \vee$$

$$\vee \bigvee_x \left(0<x \wedge \frac{-c}{a}<x \wedge x<\frac{c}{a}\right)\Big],$$

$$\sim\Big[\big(c<0 \wedge -c<0) \vee (0<c \wedge -c<0) \vee$$

$$\vee\ 0<\frac{c}{a} \vee 0<\frac{c}{a}\Big],$$

$$\sim\left(F \vee F \vee 0<\frac{c}{a}\right),$$

$$\sim 0<\frac{c}{a},$$

$$\frac{c}{a}<0 \vee \frac{c}{a}=0,$$

$$c<0 \vee c=0$$

Podstawiając wyrażenie $\frac{\alpha}{-a}$ zamiast x do pozostałych formuł atomicznych, eliminujemy z formuły Φ_i zmienną x, a następnie pomijamy bez obaw kwantyfikator.
Załóżmy teraz, że wszystkie formuły atomiczne wyrażenia Φ_i są nierównościami; można je zatem przedstawić w postaci

$$a_0 x < \alpha_0 \wedge \ldots \wedge a_p x < \alpha_p,$$

gdzie a_j są liczbami różnymi od zera, a α_j formami liniowymi, w których zmienna x nie występuje. Jeśli wszystkie a_j są dodatnie (lub wszystkie ujemne), to formuła $\bigvee_x \Phi_i$ jest zawsze prawdziwa. Zastępujemy ją formułą zawsze prawdziwą $0 = 0$ lub po prostu P (od „prawda").
W przeciwnym przypadku możemy założyć, że $a_0 \ldots a_q$ są ujemne, zaś $a_{q+1} \ldots a_p$ są dodatnie. Wówczas wyrażenie $\bigvee_x \Phi_i$ można przedstawić w postaci:

$$\bigvee_x \left[\frac{\alpha_0}{a_0} < x \wedge \ldots \wedge \frac{\alpha_q}{a_q} < x \wedge x < \frac{\alpha_{q+1}}{a_{q+1}} \wedge \ldots \wedge x < \frac{\alpha_p}{a_p}\right].$$

Z tej natomiast formuły eliminujemy kwantyfikator według wzoru z teorii porządku, zastępując ją formułą:

$$\frac{\alpha_0}{a_0} < \frac{\alpha_{q+1}}{a_{q+1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\alpha_0}{a_0} < \frac{\alpha_p}{a_p} \wedge \ldots \wedge \frac{\alpha_q}{a_q} < \frac{\alpha_{q+1}}{a_{q+1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\alpha_q}{a_q} < \frac{\alpha_p}{a_p}.$$

Kwantyfikatory ogólne eliminujemy, podobnie jak i w teorii porządku, za pomocą prawa de Morgana:

$$\bigwedge_x \Phi \equiv \sim\bigwedge_x \sim \Phi.$$

Jeżeli w formule jest więcej niż jeden kwantyfikator, eliminujemy je po kolei, rozpoczynając od wewnętrznych, to znaczy tych, które nie mają innych kwantyfikatorów w swym zasięgu. W ten sposób możemy wyeliminować kwantyfikatory z dowolnej formuły naszej teorii, to znaczy, dla dowolnej formuły Φ potrafimy podać równoważną jej formułę bezkwantyfikatorową Ψ. Jeśli formuła Φ była zdaniem, czyli nie miała zmiennych wolnych, to i formuła Ψ jest zdaniem. Jest to zdanie bezkwantyfikatorowe, a więc możemy bez trudu obliczyć wartość logiczną tego zdania w oparciu o wartości logiczne formuł atomicznych. Mamy w ten sposób metodę rozstrzygania, czy dane zdanie jest (ewentualnie nie jest) twierdzeniem teorii równości i nierówności liczb rzeczywistych. Mówimy, że teoria ta jest rozstrzygalna.
Podobnie jak w przypadku teorii porządku, można podać aksjomatykę tej teorii. Jest ona szczególnie prosta jeśli ograniczymy się do form liniowych o współczynnikach wymiernych: (symbole a, b oznaczają w niej dowolne liczby wymierne):

0. $\bigwedge_x 0+x = x,$

1. $\bigwedge_{xy} x+y = y+x,$

2. $\bigwedge_{xyz} x+(y+z) = (x+y)+z,$

3_a. $\bigwedge_x \bigvee_y ax = y,$

4_a. $\bigwedge_x (a+1)x = ax+x,$

5_a. $\bigwedge_x (a-1)x+x = ax,$

6_{ab}. $\bigwedge_x a(bx) = (ab)x,$

7_a. $\bigwedge_{xy} ax = y \leftrightarrow (a = y = 0 \vee x = \frac{1}{a} y).$

Warto zauważyć, że w przedstawionej wyżej teorii dopuszczaliśmy mnożenie tylko przez liczby konkretne, a nie zmienne. Ograniczenie to nie jest istotne. Podobną eliminację kwantyfikatorów można przeprowadzić dla dowolnych formuł teorii ciała liczb rzeczywistych, pod tym wszelako warunkiem, że kwantyfikatory formuły wiążą zmienne dla liczb, a nie zmienne dla zbiorów liczb (mówimy, że formuła taka jest elementarna). Eliminacja kwantyfikatorów wymaga w tym przypadku konstrukcji z zaawansowanej teorii wielomianów. W związku z tym nie będziemy tu tej konstrukcji przytaczać. Ograniczymy się tylko do informacji, że i w tym przypadku z możliwości wyeliminowania kwantyfikatorów wynika, iż elementarna arytmetyka liczb rzeczywistych jest rozstrzygalna.