Swoboda ruchów

Dr Marek KORDOS

W jaki sposób zmierzyć długość śrubki leżącej pod szafą? Ano, trzeba wyciągnąć śrubkę spod szafy, wziąć linijkę z podziałką i zmierzyć śrubkę.

Ta trywialna uwaga ma jednak pewien sens — wskazuje ona mianowicie, że przemieszczenie śrubki (spod szafy, dajmy na to, na stół) nie ma wpływu na wynik pomiaru długości. Nie wszystkie pomiary są niezależne od przemieszczeń, np. znajdowanie pozycji statku na morzu (pomiar długości i szerokości geograficznej).

Oba opisane zagadnienia mówią o pewnych stosunkach przestrzennych. Oba należą tym samym do obszaru zainteresowań geometrii. Jak to więc jest: możemy, czy nie możemy dokonywać przemieszczeń obiektów, których cechy geometryczne chcemy badać? Raz tak, raz inaczej? Jak zgadnąć kiedy wolno, kiedy nie?

Żeby sytuację bardziej skomplikować rozpatrzmy jeszcze dwa przykłady. Chcąc zmierzyć kąty wielokąta możemy bez szkody dla wyników zmniejszyć go, bądź powiększyć, jak nam wygodniej. Dla sprawdzenia czy skarpetka ma dziurę (dziura to też pojęcie z obszaru geometrii) możemy ją miąć, naciągać, rozciągać, słowem deformować dowolnie wystrzegając się tylko rozerwania. Tymczasem zdeformowanie śrubki (np. za pomocą młotka) mogłoby zmienić rezultat badania długości dość znacznie.

Co więc wolno robić z przedmiotem poddając go geometrycznym badaniom, aby nie zafałszować rezultatów badań? Odpowiedź ogólna wydaje się niemożliwa. Chyba, żeby uznać, że przytoczone tu własności geometryczne (długość, położenie, rozwartość kąta, posiadanie dziur) pochodzą nie z jednej, a z różnych geometrii.

PODSTAWY GEOMETRII

Na to, by jakieś badania mogły rościć sobie prawo do nazwy „nauka", trzeba by spełniały określone warunki. Trzeba mianowicie, by został jasno określony przedmiot badania. To oczywiste. Trzeba też, a to już rzecz mniej oczywista, by jednocześnie określone zostały metody badania. Dopuszczając bowiem w tym względzie absolutną dowolność możemy zaprzeczyć najoczywistszym prawdom.

Tlen w temperaturze pokojowej i pod ciśnieniem atmosferycznym jest gazem. Tak? No to wpuszczamy do zbiornika z tlenem pewną (złośliwie dobraną) ilość wodoru, mała iskierka i (o ile uszliśmy z życiem) stwierdzamy, że jest ciecz. Że nie wolno przy badaniu stanu skupienia robić takich machinacji? To właśnie jest ograniczenie metodologiczne. Dyscyplina zajmująca się ustalaniem przedmiotu badań i dopuszczalnych metod danej dziedziny wiedzy nazywa się podstawami tej dziedziny. Pytania zawarte we wstępie należą więc do podstaw geometrii.

Co do przedmiotu, to w rozpatrywanych konkretnych przykładach wszystko wydaje się być w porządku — chodzi o stosunki przestrzenne. Co do metod zaś — nie zdołaliśmy uzyskać tu odpowiedzi.

Artykuł ten jest poświęcony wskazaniu, że ustalenie metod może mieć wpływ na ustalenie przedmiotu badania.

PROGRAM ERLANGEŃSKI

Sto dwa i pół roku temu wykład inaugurujący rok akademicki na Uniwersytecie w Erlangen (Niemcy) wygłaszał wybitny matematyk Felix Klein (1849–1925). Poświęcił go geometrii. Dziś powiedzielibyśmy: podstawom geometrii — wówczas tej nazwy nie używano. Konkretnie mówił on o wpływie metod uprawiania tej dyscypliny na jej przedmiot. Zaproponował nawet, aby rozbić geometrię na szereg dyscyplin stosując zasadę — każdy zestaw metod wyznacza odrębną geometrię. Podał też sposób budowania takich „zestawów". Propozycja ta została później nazwana programem Kleina lub programem erlangeńskim. I powszechnie przyjęta.

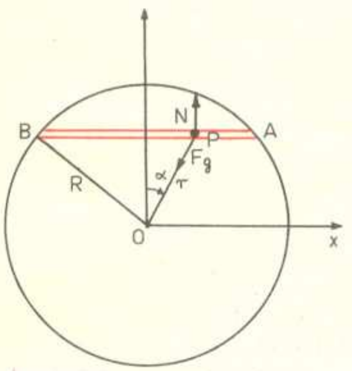
Zasada budowania zestawu dopuszczalnych metod jest prosta: umawiamy się jakie przekształcenia badanych obiektów są dopuszczalne. Aby nie uzyskać sprzeczności konieczne jest tylko przestrzeganie następujących trzech rygorów:

1. Zawsze dopuszczamy niewykonywanie żadnych przekształceń.
2. Wraz z dopuszczeniem jakiegoś przekształcenia dopuścić musimy i przekształcenie do niego odwrotne (by móc wrócić do punktu wyjścia).
3. Jeżeli dopuścimy dwa przekształcenia, musimy dopuścić i takie, które polega na wykonaniu ich kolejno.

Każdy zestaw przekształceń spełniający powyższe rygory nazywamy *grupą przekształceń*. Zatem Klein proponował, aby konkretną geometrię wyznaczała wybrana grupa przekształceń dopuszczalnych.

Rozwiązanie zadania F.14

Jeśli pominiemy tarcie, to na pociąg znajdujący się w punkcie P tunelu AB



Rys. 1

działa siła przyciągania grawitacyjnego Ziemi F_g, skierowana wzdłuż jej promienia i siła reakcji podłoża N, równoważąca składową siły ciężkości prostopadłą do torów (osi tunelu). Niezrównoważona składowa siły ciężkości, skierowana wzdłuż osi tunelu, powoduje ruch pociągu. Gdy pociąg znajduje się w odległości r od środka Ziemi, siła przyciągania grawitacyjnego wynosi (twierdzenie Gaussa):

$$F_g = k\frac{M_r \cdot m}{r^2},$$

gdzie: k — stała powszechnego ciążenia, m — masa pociągu, a M_r — masa zawarta w kuli o promieniu r. Przy upraszczającym założeniu, że gęstość Ziemi jest w każdym jej punkcie jednakowa, mamy: $M_r = M \cdot \frac{r^3}{R^3}$,

gdzie M jest masą Ziemi. Przy tych upraszczających założeniach równanie ruchu pociągu jest następujące (rys. 1):

$$m \cdot a = -k\frac{M_r m}{r^2}\cos\alpha = -\frac{kM \cdot m}{R^3} \cdot x,$$

gdzie x określa odległość pociągu od środka tunelu AB. Z powyższego równania wynika, że ruch pociągu będzie ruchem harmonicznym (przyspieszenie jest proporcjonalne do wychylenia i przeciwnie skierowane):

$$a = -\frac{kM}{R^3}x = -\frac{g}{R}x, \quad \text{bo } g = \frac{Mk}{R^2}.$$

Półokres takiego ruchu wynosi:

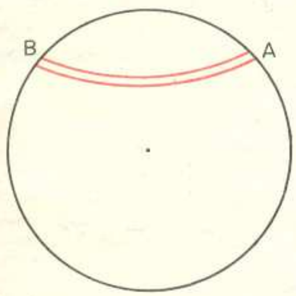
$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

To jest właśnie czas potrzebny na przebycie odległości AB. Wartość T nie zależy od odległości punktów A i B. Innymi słowy, czas przejazdu np. z Warszawy do Łodzi czy do Moskwy teoretycznie powinien być identyczny i wynosić około 42 min. 10 s.

D. c. na str, 7

D. c. rozwiązania zad. F14

Wzdłuż osi tunelu zarówno pociąg, jak i podróżni byliby poddawani tej samej składowej przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi. Oznacza to, że w tym kierunku znajdowaliby się podróżni w stanie nieważkości względem pociągu. Nie odczuwaliby, że pociąg przyspiesza lub zwalnia, odczuwaliby natomiast przyspieszenie grawitacyjne względem podłogi wagonów. Wartość tego przyspieszenia zmieniałaby się wzdłuż drogi i zależałaby od głębokości tunelu.
Zastanówcie się jeszcze, ale już sami, jak na nasze wyniki i wnioski wpłynie uwzględnienie tarcia oraz faktu, że gęstość Ziemi jest monotoniczną (jaką?) funkcją odległości (przy upraszczającym założeniu, że rozkład masy Ziemi jest kulisto-symetryczny). Ambitniejszym z Was proponujemy zastanowienie się nad jeszcze jednym problemem: czy zmiana



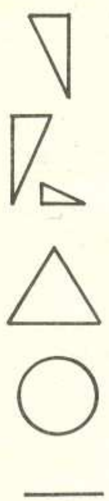
Rys. 2

kształtu toru (jak na rys. 2) zwiększy, czy zmniejszy okres T (ew. przy tych samych uproszczeniach, jakie poczyniliśmy w podanym wyżej rozwiązaniu).

Oczywisty wniosek z tych założeń jest następujący: Jeżeli geometria G jest wyznaczona przez grupę G to obiektem badań geometrii G mogą być tylko te stosunki przestrzenne, których nie zmienia żadne z przekształceń grupy G. Te stosunki przestrzenne nazywamy *niezmiennikami* grupy G.
A więc istotnie, przez wybór metod wyznaczamy przedmiot badania!

RÓŻNE GEOMETRIE KLEINOWSKIE

Jak wynika z przytoczonych rygorów istnieje najmniejsza grupa przekształceń. Taka mianowicie, w której nie dopuszczamy żadnych w ogóle przekształceń (aby nie różniła się od innych, brak przekształcenia oznaczmy literą I i też uważamy za przekształcenie — *tożsamościowe*) — oznaczmy ją I. Każdy stosunek przestrzenny jest niezmiennikiem tej grupy (nic przecież nie może ulec zmianie). Geometria I bada więc wszystkie stosunki przestrzenne, w szczególności położenie. Żadna inna geometria nie bada już położenia (dlaczego?), może tylko badać wzajemne położenie dwóch obiektów. I jest geometrią używaną przez astronomów, kartografów, topografów (w niej mieści się właśnie problem położenia statku).
Jeżeli dopuścimy wszystkie przekształcenia nie zmieniające odległości — *izometrie* (spełniają one rygory — proszę sprawdzić) otrzymamy *geometrię metryczną*. Będzie to już mniej szczegółowa geometria — wśród niezmienników nie ma już położenia, ani orientacji kątów na płaszczyźnie. Z niej korzystają inżynierowie mechanicy, budowlani, krawcy itp. (tu — śrubka).
Biorąc jako grupę przekształceń *podobieństwa* (możemy zmieniać odległości, ale wszystkie w tym samym stosunku) otrzymamy tę geometrię, którą uprawiali Euklides i Pitagoras — domenę matematyków. Odległość nie będzie tu już obiektem badań, ani pole (można badać tylko ich stosunek), pozostaną np. kąty (tu zaś — kąty wielokąta).
Jeżeli dopuścilibyśmy wszelkie przekształcenia nie wykrzywiające prostych i zachowujące ich równoległość (*przekształcenia afiniczne*) stracilibyśmy możność badania rozwartości kątów. Ciekawe, że pozostałby wśród obiektów badanych środek odcinka.
Wszystkie przekształcenia nie „rozrywające" ani nie „sklejające" figur (*homeomorfizmy*) wyznaczają geometrię o nazwie *topologia* (tu z kolei — skarpetka). Przekształcenia *wzajemnie jednoznaczne* (jeszcze ogólniejsze — figury mogą się „rozrywać" i „sklejać", nie mogą się „rozrywać" ani „sklejać" punkty) wyznaczają *teorię mnogości* — tak jest! — teorię zbiorów.
Można wyżej podane pojęcia zilustrować w następujący sposób: Przekształcenia każdej z wymienionych grup pozwalają pewne figury nałożyć na siebie, zaś innych nie. Te, które dadzą się na siebie nałożyć są z punktu widzenia odpowiedniej geometrii identyczne. Na podanym obok rysunku mamy sześć różnych figur z punktu widzenia geometrii położenia, tylko pięć różnych z punktu widzenia geometrii metrycznej (pierwsze dwie są identyczne), cztery różne z punktu widzenia geometrii podobieństw (pierwsze trzy są identyczne), trzy — z punktu widzenia geometrii afinicznej (pierwsze cztery, piąta i szósta), dwie — z punktu widzenia topologii (pierwszych pięć i szósta) i jedną — z punktu widzenia teorii mnogości.



Uwaga!

Niedoskonałość powyższego tekstu, może spowodować kilka nieporozumień. „Odetnijmy się" zatem od dwóch najbardziej prawdopodobnych.
— Zwrot „różne geometrie" jest używany nie tylko w podanym wyżej sensie, lecz także dla określenia stosunków przestrzennych w różnych przestrzeniach (np. przestrzeń Euklidesa i przestrzeń Bolyai-Łobaczewskiego). Tutaj mówimy o różnych geometriach tej samej przestrzeni (konkretnie Euklidesa). Dla podkreślenia napisaliśmy więc „różne geometrie kleinowskie". Oczywiście istnieją różne geometrie kleinowskie przestrzeni Bolyai-Łobaczewskiego (choć już nie takie same) i innych przestrzeni.
— Podane przykłady geometrii są uszeregowane od najbardziej szczegółowej do najbardziej ogólnej. Geometrii kleinowskich przestrzeni Euklidesa jest wiele (nieskończenie wiele). Błędem byłby wniosek, że dadzą się one wszystkie w takim „rosnącym" ciągu ustawić. Np. grupa przekształceń zachowujących pola wyznacza geometrię ani bardziej szczegółową, ani bardziej ogólną od geometrii podobieństw.

Ćwiczenia

1. Przez wybranie odpowiedniej grupy przekształceń określić geometrię bardziej ogólną od geometrii położenia i zarazem bardziej szczegółową od geometrii metrycznej. Grupa ta musi mieć zatem jakiś niezmiennik nieobecny wśród niezmienników izometrii i dopuszczać zmianę położenia.
2. W których z wymienionych geometrii można sformułować twierdzenie Pitagorasa. Niby jest tam mowa o odległości, ale...
3. Jeżeli środek jest niezmiennikiem geometrii afinicznej to może być skonstruowany za pomocą jej pojęć. Istotnie można skonstruować środek odcinka tylko kreśląc proste i prowadząc równoległe (bez cyrkla i żadnego odmierzania). Warto spróbować.

Literatura

Pewne informacje związane z tematem artykułu można znaleźć w podręczniku
Z. Krygowska, O. Maroszkowa: *Geometria II*.
Szersze potraktowanie tematu zawiera np.
L. S. M. Coxeter: *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*.
Interesujących się zagadnieniem od strony geometrii analitycznej kierujemy do podręcznika
K. Borsuk: *Geometria analityczna wielowymiarowa*.