Równania różniczkowe (II)

Dr Henryk KOŁAKOWSKI

Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (1)–(2) orzeka, że jeśli w ogóle takie rozwiązanie istnieje, to tylko jedno.

Twierdzenie o istnieniu orzeka, że istnieje co najmniej jedno rozwiązanie — bez precyzowania, ile jest rozwiązań.

W poprzednim artykule («Delta», 1974, 10) poznaliśmy kilka faktów związanych z teorią równań różniczkowych zwyczajnych. Obecnie przyjrzyjmy się bliżej niektórym wymienionym tam problemom. Rozważania nasze będą dotyczyły twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

spełniającego warunek początkowy

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

gdzie f jest funkcją określoną w prostokącie $\Omega = \{(x\,y)\colon |x-x_0| < a, |y-y_0| < b\}$.

Zanim przejdziemy do ogólnych sformułowań, omówimy kilka przykładów.

P r z y k ł a d 1. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \tag{3}$$

z warunkiem początkowym

$$y(0) = 1. \tag{4}$$

gdzie Ω jest zbiorem $\{(x, y)\colon |x| < 5, |y-1| < 4\}$.

Stosując metodę podaną w poprzednim artykule o równaniach różniczkowych dochodzimy do wniosku, że rozwiązaniem równania (3) jest każda funkcja postaci

$$y = -\frac{1}{x-c}, \quad c = \text{const},$$

oraz funkcja $y \equiv 0$.

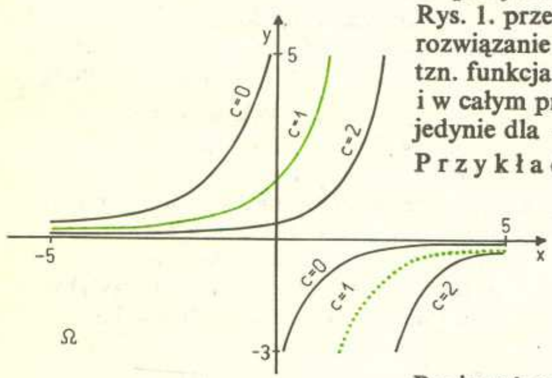
Warunek (4) spełnia tylko funkcja

$$y = -\frac{1}{x-1},$$

rozpatrywana dla $-5 < x < 1$.

Z założenia (por. «Delta», 1974, 10) rozwiązaniem zagadnienia (1)–(2) ma być funkcja określona na pewnym przedziale. Z tego względu „dolna" część wykresu funkcji $y = -\frac{1}{x-1}$ nie należy do rozwiązania.

Rys. 1. przedstawia szkic krzywych całkowych równania (3). Kolorem zaznaczono rozwiązanie zagadnienia (3)–(4). W przykładzie tym prawa strona równania (3) tzn. funkcja $f(x, y) = y^2$ określona jest na całej płaszczyźnie, a więc i w całym prostokącie Ω. Mimo to rozwiązanie zagadnienia (3)–(4) jest określone jedynie dla $-5 < x < 1$.



Rys. 1

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \tag{5}$$

z warunkiem początkowym

$$y(0) = 0. \tag{6}$$

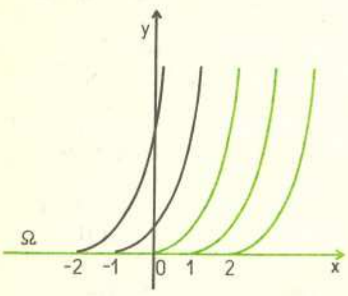
gdzie $\Omega = \{(x, y)\colon x \text{ — dowolny}, y \geqslant 0\}$.

Ponieważ prawa strona (5) jest nieujemna, więc rozwiązanie musi być funkcją niemalejącą, zatem rozwiązaniem zagadnienia (5)–(6) jest każda funkcja postaci

$$y = \begin{cases} (x-c)^2 & \text{dla} \quad x > c, \quad 0 \leqslant c = \text{const}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leqslant c, \quad c \geqslant 0 \end{cases}$$

oraz funkcja $y \equiv 0$.

Warto sprawdzić, że funkcja ta rzeczywiście ma pochodną w punkcie „sklejenia" $x = c$. Jak to zrobić?



Rys. 2

Każda z tych funkcji jest określona i różniczkowalna na całej prostej. Rys. 2 przedstawia szkic krzywych całkowych równania (5). Kolorem zaznaczono rozwiązanie zagadnienia (5)–(6). Zatem, jeśli prawa strona równania (1) jest nawet wielomianem, a więc funkcją określoną na całej płaszczyźnie (P r z y k ł a d 1), to rozwiązanie konkretnego zagadnienia nie musi być określone na całej prostej. Jeśli funkcja $f(x, y)$ zależy tylko od zmiennej y i jako funkcja jednej zmiennej jest funkcją ciągłą (P r z y k ł a d 2), to konkretne zagadnienie może mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Zanim sformułujemy podstawowe twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (1)–(2), podamy kilka niezbędnych definicji pojęć związanych z funkcjami dwu zmiennych.

Niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną w prostokącie Ω. Niech dalej $P_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, oznacza dowolny ciąg punktów prostokąta Ω; niech $P = (x, y) \in \Omega$. Zamiast $f(x, y)$ możemy więc pisać: $f(P)$. Przez $\varrho(P_n, P)$ będziemy rozumieli odległość punktu P_n od punktu P.

DEFINICJA 1. Ciąg P_n jest zbieżny do punktu P, jeśli ciąg liczbowy $\varrho(P_n, P)$ jest zbieżny do zera.

DEFINICJA 2. Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w danym punkcie P, jeśli dla każdego ciągu P_n zbieżnego do P ciąg liczbowy $f(P_n)$ jest zbieżny do $f(P)$.

DEFINICJA 3. Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w Ω, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $P \in \Omega$.

Funkcjami ciągłymi w Ω są m.in. funkcje postaci

$$f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)+ \ldots +f_k(x)g_k(y),$$

gdzie f_i, g_i, $i = 1, 2, \ldots k$, są funkcjami ciągłymi jednej zmiennej.

DEFINICJA 4. Funkcja $f(x, y)$ spełnia w Ω warunek Lipschitza ze względu na zmienną y, jeśli istnieje stała L taka, że dla każdej pary punktów (x, y_1), (x, y_2)

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|.$$

Przykładem funkcji spełniającej ten warunek może być np.

$$f(x, y) = \sin(x+y)$$

dla Ω będącego całą płaszczyzną. Istotnie

$$|\sin(x+y_1)-\sin(x+y_2)| = 2\left|\sin\frac{y_1-y_2}{2}\cos\frac{2x+y_1+y_2}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{y_1-y_2}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 1\cdot|y_1-y_2|.$$

Liczba L równa jest tutaj jedności.

W roku 1890 włoski matematyk Józef Peano udowodnił, że jeśli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w prostokącie Ω, to istnieje co najmniej jedno rozwiązanie $y = y(x)$ zagadnienia (1)–(2), określone w pewnym otoczeniu punktu x_0.

Twierdzeniem, które gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia (1)–(2), jest np. twierdzenie Cauchy'ego–Picarda. W założeniach tego twierdzenia oprócz warunku ciągłości funkcji $f(x, y)$ występuje warunek Lipschitza.

Z twierdzenia Cauchy'ego–Picarda i z P r z y k ł a d u 2 wynika, że $f(x, y) = \sqrt{y}$ $(y \geqslant 0)$ nie spełnia warunku Lipschitza!

P r z y k ł a d 3. Rozwiążmy równanie

$$\frac{di}{dt} + i = \sin t. \tag{7}$$

z warunkiem początkowym

$$i(0) = 0. \tag{8}$$

(Zagadnienie tego typu wykorzystuje się do analizy obwodów elektrycznych).

Twierdzenie Cauchy'ego–Picarda gwarantuje nam istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia (7)–(8), ponieważ prawa strona równania (7) spełnia założenia tego twierdzenia. Wynika stąd przede wszystkim, że warto w ogóle szukać rozwiązania naszego zagadnienia. Co więcej — wiemy już, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie. Gdyby więc udało nam się je w jakiś sposób odgadnąć, to będziemy mieli pewność, że zagadnienie zostało w pełni rozwiązane.

Przy pewnej wprawie i odrobinie szczęścia daje się odgadnąć, że rozwiązaniem zagadnienia (7)–(8) jest funkcja

$$i(t) = \frac{1}{2}(e^{-t}+\sin t-\cos t).$$

Jednym z pożytków płynących z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności jest więc to, że dzięki niemu zgadywanie staje się całkiem porządną metodą rozwiązywania równań różniczkowych.

D.c. zad. F19

Rozważamy niezależnie ruch części liny leżącej na stole ora z zwisającej. Ale, uwaga, masa każdej z części zmienia się w czasie. Coraz więcej liny zwisa, a coraz mniej leży na stole. Napiszmy zasadę zachowania pędu dla danej części liny. Zmiana pędu Δp, w przedziale czasu $\langle t, t+\Delta t\rangle$ wynosi:

(7) $\Delta p = F\Delta t + \Delta m \cdot v_m$, gdzie F jest zewnętrzną siłą działającą, a $\Delta m \cdot v_m$ pędem przynoszonym (wynoszonym) przez przyrastającą (ubywającą) masę Δm.

W naszym zadaniu przybywające masy nie mają składowej prędkości w kierunku ruchu rozważanej części liny, (np. zwisająca część liny porusza się wzdłuż osi z, a przybywająca masa poruszała się wzdłuż osi x). Dlatego, drugi składnik w równaniu (7) możemy pominąć. Odpowiednie równania ruchu dla pionowej i poziomej części liny mają postać:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(M\frac{x}{l}v_x\right) = -T \\ &\frac{d}{dt}\left(M\frac{z}{l}v_z\right) = M\frac{z}{l}g-T \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie T jest naprężeniem liny, a v_x i v_z oznaczają prędkość środków masy odpowiednich części liny. Oczywiście:

$$v_x = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}, \quad v_z = \frac{1}{2}\frac{dz}{dt}.$$

Odejmując równania (8) stronami i wykorzystując zależność $x = l-z$ otrzymamy:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{2g}{l}z \tag{9}$$

Równanie (9) różni się od równania (1), dającego poprawne rozwiązanie zadania o czynnik 2 po prawej stronie. Gdzie zakradł się błąd do przytoczonego rozumowania. Odpowiedź na str. 16.

Rozwiązanie zadania M 53.

Zauważmy, że zachodzi tożsamość

$$a^k-b^k = (a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1}).$$

Mamy $27^{n+1}-27-26n = 27(27^n-1)-26n = 27(27-1)(27^{n-1}+27^{n-2}+\ldots+27+1)-26n = 26[27^n+27^{n-1}+\ldots+27-n] = 26[(27^n-1)+(27^{n-1}-1)+\ldots+(27-1)]$.

Liczba w nawiasie prostokątnym jako suma liczb podzielnych przez 26 jest podzielna przez 26.

Wynika stąd, że liczba $27^{n+1}-27-26n$ jest podzielna przez $26^2 = 2^2 \cdot 169$, a więc i przez 169.