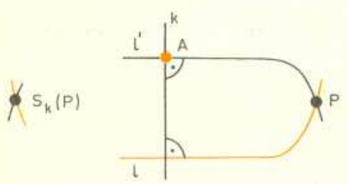
Na przełaj przez geometrię Bolyai-Łobaczewskiego

Dr Marek KORDOS

Redakcja nie twierdzi, że artykuł ten wystarczy raz przeczytać, aby wszystko zrozumieć; twierdzi jednak, że zrozumieć go można.

W 1829 r. Nikołaj Łobaczewski i (niezależnie) w 1832 r Janos Bolyai ogłosili, że skonstruowali system geometryczny różny od zwykłego, zwanego od tej pory euklidesowym. W 1903 r. Dawid Hilbert udowodnił, że mieli rację: wykazał, że przyjęte przez nich założenia nie prowadzą do sprzeczności.
Cała sztuka, że się tak wyrażę, polegała na chęci przyświecającej obu autorom, aby „ich" geometria różniła się od geometrii euklidesowej nieznacznie: chodziło tylko o zamianę jednego z aksjomatów — tzw. piątego postulatu Euklidesa — na jego zaprzeczenie; reszta aksjomatów pozostać miała nie zmieniona. Zostawiając do następnej okazji sprawę „dlaczego akurat tak" i ciekawą historię tego problemu, w tym artykule przedstawię pewne twierdzenia geometrii Bolyai-Łobaczewskiego, czy inaczej — geometrii hiperbolicznej (patrz «Delta» 1975, 7), aby dać wyobrażenie o jej zgodności, bądź niezgodności, z wykształconą w nas wszystkich geometryczną intuicją euklidesową.

Geometria absolutna.
Piąty postulat Euklidesa orzeka, że *do danej prostej przez dany nie leżący na niej punkt można poprowadzić co najwyżej jedną prostą rozłączną* (tj. nie przecinającą jej).
Zauważmy, że nie musimy korzystać z tego postulatu, aby dowieść, że taka rozłączna rzeczywiście istnieje. Niech A będzie punktem nie leżącym na prostej l.
Konstruujemy kolejno:
prostą k przechodzącą przez A i prostopadłą do l,
prostą l' przechodzącą przez A i prostopadłą do k.



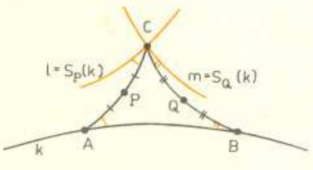
Należy wykazać, że l i l' nie przecinają się. Gdyby się jednak przecinały w punkcie P, to stosując symetrię względem prostej k mielibyśmy

$$P \neq S_k(P) \in S_k(l) \cap S_k(l') = l \cap l'$$

Proste l i l' miałyby dwa różne punkty wspólne, a więc byłoby $l = l'$, co jest sprzeczne z $A \notin l$ i $A \in l'$.

Widać stąd, że geometria eliptyczna (patrz Delta 1975, 7) nie jest rozszerzeniem geometrii absolutnej. Nie ma w niej przecież prostych rozłącznych.

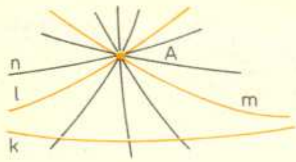
Twierdzenie o istnieniu prostej rozłącznej udowodnione przed chwilą jest zatem twierdzeniem *geometrii absolutnej*, tak bowiem nazywamy tę część geometrii, którą można zbudować bez posługiwania się piątym postulatem Euklidesa. Ma ona dwa rozszerzenia — geometrię Euklidesa, gdzie zakładamy, że skonstruowana wyżej prosta jest jedyną rozłączną i geometrię Bolyai-Łobaczewskiego, gdzie zakładamy, że nie jedyną. Do geometrii absolutnej należy również np. następujące twierdzenie Saccheri-Legendre'a: *suma kątów w trójkącie jest nie większa od dwóch kątów prostych*. Bezpośrednim wnioskiem tego twierdzenia jest spostrzeżenie, że **jeśli** suma kątów w trójkącie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to przez wierzchołek tego trójkąta przechodzą co najmniej dwie proste rozłączne z prostą zawierającą podstawę. Przeprowadzenie dowodu (zob. rysunek) pozostawiam Czytelnikom, gdyż jest on podobny do wyżej podanego. Zauważmy jeszcze, że wówczas prostych rozłącznych z k przechodzących przez C jest nieskończenie wiele — są to wszystkie proste przechodzące przez C i zawarte w kącie wierzchołkowym o ramionach l i m nie zawierającym A. Oba te spostrzeżenia można zaliczyć do geometrii Bolyai-Łobaczewskiego, gdyż, jak wiemy ze szkoły, wyróżnione wyżej „jeśli" nie ma miejsca w geometrii Euklidesa. Geometria absolutna ma więc dwa różne rozszerzenia:
geometrię Euklidesa, gdzie przez dany punkt przechodzi, tylko jedna rozłączna z daną prostą i gdzie suma kątów trójkąta jest równa dwu kątom prostym;
geometrię Bolyai-Łobaczewskiego, gdzie owych rozłącznych jest nieskończenie wiele i gdzie suma kątów w trójkącie jest od dwóch kątów prostych mniejsza.
Dalej zajmiemy się tylko tą drugą.



Proste na rysunku są „krzywe". Tak tradycyjnie wykonuje się rysunki geometrii hiperbolicznej. Zwyczaj ten ma pewne uzasadnienie graficzne, które być może stanie się widoczne przy następnych rysunkach. Nie może on jednak mieć żadnego znaczenia dającego się wyrazić w języku matematyki.

Defekt figury.
Defektem trójkąta nazywamy różnicę liczby π i sumy rozwartości jego kątów. Jest to więc w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego funkcja o wartościach dodatnich. Funkcja ta, oznaczana literą Δ, jest też w pewnym sensie rosnąca: jeżeli jeden trójkąt zawiera drugi to ma większy defekt. I znów dowód zostawiam Czytelnikom podając rysunek — należy zliczyć defekty wszystkich narysowanych trójkątów.

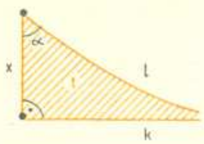
I tutaj niespodzianka: *Dwa trójkąty o odpowiednio równych kątach są przystające.* Istotnie, wiemy, że muszą być podobne, ale gdyby jeden z nich był większy, to w myśl wyżej podanych uwag miałby większy defekt, a więc mniejszą sumę kątów, wbrew założeniu. Zatem w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego *każde podobieństwo*



jest izometrią. Pojęcie defektu rozszerzamy na dowolne figury przez umowę: jest to kres górny sumy defektów zawartych w tej figurze rozłącznych trójkątów.

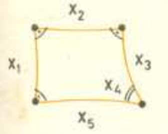
Funkcja Łobaczewskiego.

Zajmiemy się teraz prostymi równoległymi. Jak łatwo zauważyć musimy je najpierw zdefiniować, gdyż znana definicja euklidesowa nie da się tu zastosować. Proste l i m przechodzące przez punkt A nazwiemy *równoległymi* do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy one nie przecinają k i w jednym z utworzonych przez nie kątów wierzchołkowych każda prosta przechodząca przez A przecina k, a w drugim żadna. Proste rozłączne, a nie równoległe, nazywamy *nadrównoległymi* (na rysunku k i n).



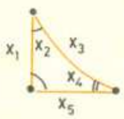
Niech proste k i l będą równoległe. Można wykazać, że przedstawiony obok trójkąt prostokątny nieskończony t ma defekt równy $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Zauważmy też, że wobec faktu, iż defekt jest funkcją rosnącą, α jest malejącą funkcją długości odcinka x. Nazywamy ją funkcją Łobaczewskiego i oznaczamy literą Π, a jej wartość dla danego odcinka — kątem równoległości. Wprowadza się jeszcze pojęcie uzupełnienia liczby dodatniej x: jest to taka liczba x^*, że

$$\Pi(x) + \Pi(x^*) = \frac{\pi}{2}$$



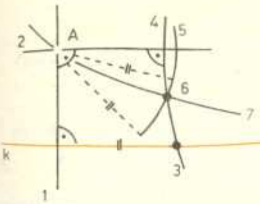
Twierdzenie Liebmanna.

Jak łatwo spostrzec w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego nie ma prostokątów. Ich rolę przejmują *czworokąty Lamberta* o trzech kątach prostych. Postawmy pytanie: jakie warunki muszą spełniać liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, aby istniał wyznaczany przez nie jak na rysunku czworokąt Lamberta (oznaczymy go dalej przez cL($x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$)).

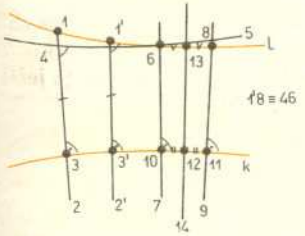


Nie mamy również znanego twierdzenia Pitagorasa. Zapytajmy: jakie warunki muszą spełniać liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, aby istniał opisany przez nie jak na rysunku trójkąt prostokątny (oznaczmy go dalej przez tp($x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$)).

Bardzo ciekawym twierdzeniem geometrii Bolyai-Łobaczewskiego jest wiążące ze sobą te dwa pytania twierdzenie Liebmanna. Mówi ono, *że istnieje* tp($x_1\, \Pi(x_2) x_3\, \Pi(x_4) x_5$) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* cL($x_1 x_2^* x_3 \Pi(x_5) x_4$).

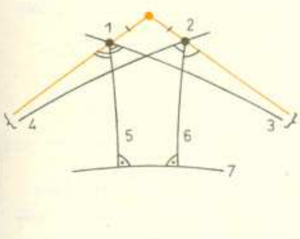


Gdyby komuś to twierdzenie wydawało się dziwne lub nieprzydatne — polecam sprawdzenie podanej obok konstrukcji (cyrklem i linijką!) prostej równoległej w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego; konstruowane obiekty są ponumerowane wg kolejności w jakiej należy je kreślić (nawiasem mówiąc konstrukcja ta daje równoległą i w geometrii euklidesowej). Twierdzenie Liebmanna orzeka, że prosta l jest równoległa do k.

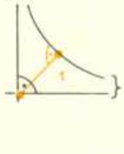


Zagradzająca.

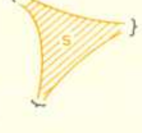
Dla dowolnego kąta istnieje prosta równoległa do obu jego ramion. Nazywa się ją zagradzającą. Aby podać jej konstrukcję musimy najpierw nauczyć się konstruować wspólną prostopadłą dla prostych nadrównoległych (równoległe nie mogą mieć wspólnej prostopadłej — prawda?). Robi się to tak jak na rysunku podanym obok. Wyjaśnić należy chyba tylko początek: punkty 1 i 1′ obieramy dowolnie, z nich konstruujemy 2 i 2′, oraz 3 i 3′. Jeżeli 13 ≡ 1′3′ to szukaną prostą jest prosta łącząca środki 11′ i 33′, jeżeli zaś tak nie jest, to postępujemy jak na rysunku. Bardzo polecam dowiedzenie, że prosta 14 jest istotnie prostopadła zarówno do k jak i do l. Obiecaną konstrukcję zagradzającej przedstawia kolejny rysunek. Klamerki na nim symbolizować mają równoległość. Zagradzającą 7 uzyskaliśmy jako wspólną prostopadłą nadrównoległych 5 i 6 (?). Znów okazja do wykazania poprawności konstrukcji.



Ogromnie ważną własnością geometrii Bolyai-Łobaczewskiego jest to, że wyróżnia ona niektóre odcinki (tak jak w geometrii euklidesowej wyróżniony jest np. kąt prosty spośród innych kątów). Pozwala to na określenie w tej geometrii długości bez odwoływania się do jakichkolwiek umownych jednostek (jak nasz metr). Jeżeli przyjmiemy np. że odległość wierzchołka kąta prostego od jego rzutu na zagradzającą tego kąta jest równa 1, to pole dowolnego trójkąta będzie równe jego defektowi.



Wątpiącym, czy nie da się i w geometrii euklidesowej wprowadzić geometrycznie zdefiniowanej jednostki długości, polecamy nie ustawać w staraniach nad jej znalezieniem, dla pozostałych zaś



Zadanie. Na rysunku podane są trzy proste równoległe parami. Ograniczają one pewną figurę s.
— Wykazać, że pole każdej takiej figury jest takie samo,
— obliczyć to pole przy wyżej podanej jednostce długości,
— czy każde dwie takie figury są przystające?
— jak można skonstruować taką figurę?