

Ponure skutki nieznajomości elementów teorii mnogości

Wiktor MAREK

— Szanowny Mistrzu Leonie — rzekł Doktor Bazylis z Cesarsko-Książęcego Uniwersytetu Pafladocji — już przecież w trakcie studiów w Heidelbergu, Oxfordzie i Getyndze byłem o wiele lepszym studentem, a przecież wiedza ma wciąż rośnie.

— Nieprawda — odrzekł Mistrz Leon. — Tylko mocnemu piwu w tej karczmie zawdzięczać należy twe niepohamowane przechwałki. Na przykład w tegorocznym konkursie Akademii Krympollińskiej wziąłem pierwszą nagrodę! A ty? — Tu znacząco zawiesił głos.

— Wolałem w ogóle nie wysyłać mych genialnych prac, by nie kompromitować przeciwników: zwykła litość nad głupszymi.

— Ha — zapienił się Mistrz Leon — krew moja lub Pańska to rozstrzygnie!

— Niewielka to sztuka — rzekł Bazylis — wszak Waść ważysz 8 pudów, a pięć masz niby bochen chleba, ale głowa, głowa — tu ja jestem silniejszy!

— I tu przegrasz — krzyknął Mistrz Leon — A dyplomy Akademii Paryskiej, Rzymskiej i Petersburskiej? Wszystkie mam i wiem...

— Widać Waści dyplomy mózg zastąpiły — mruknął Bazylis. — Ale dobrze, warunki proponuj.

— Dobrze — rzekł Mistrz Leon. — Kto trudniejszy dowód twierdzenia wymyśli, ten lepszy.

— Czyżby? — rzekł jadowicie Bazylis. — A cóż to znaczy „trudniejszy”?

W naszym oświeconym XVIII wieku trzeba by definicję „trudniejszego” podać. A zresztą, trudniejszy dla kogo? Co trudne dla ciebie, może być łatwe dla mnie.

— I na odwrót — basem dodał Mistrz Leon.

— Więc może dłuższy dowód? — zaproponował Mistrz Leon nieco zakłopotany.

— Nie zawsze co dłuższe, to mądrzejsze — rzekł Bazylis. — Zawsze wolę dowód krótki i jasny niż rozwlekły, a zawiślany.

— Więc jak? — mruknął Mistrz Leon — Trudno z Waszeci sztuczkami dyskutować.

— Może by tak po prostu przekonać się, kto więcej twierdzeń wymyśli — rzekł Bazylis. — Ja wymyślę, Wasze wymyśli, a za trzy dni się spotkamy i policzymy.

— Jak to: policzymy? — rzekł Mistrz.

— Zwyczajnie, policzymy Twoje, moje i będziemy wiedzieli, kto wymyślił więcej.

— Hm — chrząknął mistrz Leon. — A jak liczyć będziemy?

— Po prostu, Ty policzysz swoje, ja policzę swoje i porównamy.

— Nie wierzę Waszeci! — krzyknął Mistrz. — Na pewno sobie dodasz jeden dziesiątek i drugi.

— Tak — mruknął Bazylis — po tobie też się tego można spodziewać. To może na odwrót? Wasze moje, a ja Twoje.

— Znam wszystkie Twoje sztuczki — rzekł Mistrz Leon. — Tu potrzeba uczciwego rozjemcy. Wołaj komendanta straży! — zawołał do syna karczmarza. — Byle szybko.

Komendant miejscowego oddziału Żandarmów Piesznych, wysłuchawszy w czym rzecz, rzekł:

— To nie jest takie proste, Panowie. Jestem człowiekiem honoru ...

— Jeśli chodzi o pieniądze — rzekł szybko Bazylis — to ...

— Panowie — rzekł Komendant — jestem człowiekiem honoru, ale jeśli chodzi o liczenie to niestety u nas, Panowie rozumieją ... — Tu znacząco zawiesił głos.

— Temu na szczęście można zaradzić — rzekł Bazylis. — Oto ustawimy przed Tobą dwie skrzynki. Każda zawierać będzie karteczki. Wasze z mojej lewą ręką, a ze skrzynki mego przeciwnika prawą wybierać będziesz po karteczce. W ten sposób, jeśli w którejś skrzynce zostanie po zakończeniu liczenia kartka, będzie to znaczyć, że ten z nas miał twierdzeń więcej, a więc wygrał.

— Świetnie! — krzyknął Mistrz Leon. — Spieszę do mego pokoju i zasiadam do pracy.

Tej nocy każdy z przeciwników, nim zasnął, miał dziwny sen — widzenie. Ot, zjawiał się dziwny jakiś twór, ni człowiek to, ni kozioł, i rzekł: „Pomogę Ci wygrać ten spór. Dostarczę Ci nieskończenie wiele twierdzeń. A Ty mi tylko, drobnostka, podpiszesz ten pergamin krwią z serdecznego palca. Ponieważ Twój przeciwnik będzie miał tylko skończoną liczbę twierdzeń, a więc, prędzej czy później, jego skrzynka opróżni się, podczas gdy Twoja nigdy nie będzie pusta”.



Rozwiązanie zadania M70.

Zbiorem takim będzie np. dowolny łuk okręgu oparty na kącie środkowym mniejszym niż π .



Rozwiązanie zadania M71.

Latwo sprawdzić, że dla dowolnego t punkty

$(a \frac{2t}{1+t^2}, b \frac{1-t^2}{1+t^2})$ leżą na danej

elipsie i jeżeli t jest liczbą wymierną to obydwie współrzędne tych punktów są wymierne. Dla różnych t otrzymujemy różne punkty.



Nazajutrz rano obaj ślali służących do balwierza po maść przeciw zadrapaniom dziwnym, w nocy powstałym.

I oto po trzech dniach spotkali się uczeni przeciwnicy w oberży „Pod Kopytem Wicekróla”. Za każdym z nich niósł służący olbrzymich rozmiarów skrzynię.

Komendant Straży spojrział na nie bardzo zakłopotany.

— Czy aby wytrzymam? — rzekł zaniepokojony. — Siły ludzkie nie są niewyczerpane.

Pierwszy zorientował się w sytuacji Bazylisus.

— Nabrał nas obu, kuternoga — pomyślał w duchu.

— Nic to — powiedział. — Przecież nie samo liczenie jest ważne, lecz sposób liczenia. Kto sposób zna, ten licząc bardzo szybko ...

— Nieskończenie szybko — zjadliwie rzekł Mistrz Leon.

— ... liczenia dokona — rzekł nie speszony Bazylisus.

— A liczyć będzie się tak — dodał. — Weź z mojej skrzynki 3 kartki z twierdzeniami i odłóż na bok. A teraz postępuj, jak umówiliśmy się. Po jednej z każdej skrzynki, lewą i prawą ręką.

Komendant Straży coraz szybciej rękami kartki ze skrzynki wyciągał (a za każdym razem wyjęcie pary kartek zajmowało mu połowę czasu, który zajmowało mu wyjęcie pary poprzedniej). Że zaś kartki były ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi, szybko rzecz całą ukończył. Mistrz Leon w osłupieniu patrzył na stos kartek i trzy kartki Bazylisusa. Ten zaś mówił:

— I co, zostały trzy moje, a więc wygrałem.

— Jeszcze chwilka — krzyknął Mistrz Leon. — Powtórzmy liczenie, ale ja teraz pokażę, jak liczyć. I włożywszy błyskawicznie wszystkie kartki do pudeł rzekł:

— Mości Komendancie, inaczej liczyć będziemy. Biorąc ze skrzynki Doktora kartkę, postąpisz jak następuje: jedną kartkę moją pominięsz, a weźmiesz następną.

Komendantowi dwa razy powtarzać nie trzeba było, z zadaniem uporał się błyskawicznie. I oto w skrzynce Mistrza Leona kartek niemal nie ubyło, choć może nieco rzadziej były ułożone, podczas gdy skrzynka Bazylisusa była pusta.

— I widzisz — rzekł Mistrz Leon. — Zostało mi tyle, że raz jeszcze można by je z Twoimi porównać. A więc nawet każdemu Twojemu dwa moje twierdzenia można przypisać, tak więc mam dwa razy więcej ...

— Nieprawda! — krzyknął Bazylisus. — Twój sposób nieważny ...

Ale tu wtrącił się Komendant Straży i rzekł surowo:

— Panowie, czuję w tym czartowską moc jakąś. A i te kartki nieco siarką trącą. Albo mi to wszystko zaraz, co tu się działo, objaśnicie, albo do Sądu Diecezjalnego Was oddam, a tam już sposoby swoje mają i wiedzą, co z takimi robić.

— To nie jest takie proste! — odpowiedzieli jednocześnie przeciwnicy.

*

Stojąc na stosie drewna, mocno przywiązany do słupa, mówił Mistrz Leon do Doktora Bazylisusa:

— A właściwie to chciałbym wiedzieć, który z nas ten zakład wygrał?



Aby zrozumieć, że w paradoksie, który wzburzył Kapitana Żandarmów Piesznych, nie ma nic szatańskiego, należy wiedzieć, że:

Dwa zbiory są równoliczne (mają „tyle samo” elementów), gdy istnieje różnowartościowa funkcja przeprowadzająca jeden z nich na drugi. Np. zbiór mędrców stających do zawodów i zbiór skrzyń z twierdzeniami były równoliczne, a funkcję ustalili pacholkiwie niosąc różne skrzynie za różnymi mędrkami.

Przy tej, dziś powszechnie przyjętej, definicji okazuje się, że zbiory nieskończone mogą być równoliczne z pewnymi spośród swoich podzbiorów właściwych. Np. funkcja $f(x) = x^2$ ustala równoliczność zbioru liczb naturalnych ze zbiorem kwadratów takich liczb, funkcja $f(x) = 2x$ — równoliczność zbioru liczb naturalnych ze zbiorem liczb parzystych dodatnich (co zostało

zastosowane przez Mistrza Leona), funkcja $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ — równoliczność przedziału $(-1, 1)$ i zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Nie należy wątpić, że Czytelnicy potrafią znaleźć jeszcze wiele przykładów, co, mam nadzieję, na stos żadnego z nich nie zaprowadzi.

