



„Obserwowałem ruch łodzi ciągniętej szybko przez parę koni wzdłuż wąskiego kanału, a gdy nagle łódź się zatrzymała, woda w kanale wprowadzona przez nią w ruch tego nie uczyniła, zgromadziła się dookoła dziobu statku w stanie gwałtownego wzburzenia, potem nagle pozostawiła dziób w tyle posuwając się z dużą prędkością do przodu przybierając kształt dużego, samotnego wzniesienia, zaokrąglonego wzgórza wody o dobrze określonej formie, które utrzymywało swój ruch bez widocznej zmiany kształtu lub zmniejszenia prędkości. Towarzyszyłem mu konno i dogoniłem stale poruszające się z prędkością osiem lub dziewięć mil na godzinę i ciągle zachowujące swój pierwotny kształt około trzydziestu stóp długi i stope do półtorej wysoki. Jego wysokość stopniowo malała, a po ściganiu go na przestrzeni jednej lub dwóch mil zgubiłem je w zakręcie kanału. Tak więc w miesiącu sierpniu 1834 roku miałem pierwszą okazję spotkania się z tym pięknym i osobliwym zjawiskiem.”

J. Scott Russell — *Sprawozdania Królewskiego Towarzystwa w Edynburgu str. 319—320, 1844 r.*

Doc. dr Antoni KUSZELI

## jawiska nieliniowe w fizyce

Większość zjawisk fizycznych opisywana jest przez równania liniowe. Własności takich równań są najlepiej zbadane. Opracowano bardzo rozbudowany aparat matematyczny służący do ich analizy. Na wynikach odpowiednich teorii oparte są nasze intuicje, pomocne przy rozwiązywaniu problemów. Nawet w wypadkach, gdy wyjściowe równania mają strukturę nieliniową, to zwykła procedura polega na szukaniu rozwiązań w postaci małych odchyżeń od pewnego stanu równowagi, opisywanych przez równania liniowe. Tak więc przenosimy nasze intuicje liniowe na problemy nieliniowe. Okazuje się jednak, że jest to niebezpieczne i w wielu przypadkach rozwój układu nieliniowego może być krańcowo różny od zachowania odpowiedniego układu zlinearyzowanego.

Należy prześledzić zasadnicze różnice pomiędzy układem liniowym a nieliniowym. Podstawowymi własnościami układów liniowych są: twierdzenie o jednoznaczności oraz zasada superpozycji. Twierdzenie o jednoznaczności orzeka, że dane równanie uzupełnione odpowiednimi warunkami brzegowymi (początkowymi) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Twierdzenie to jest też słuszne dla pewnych równań nieliniowych (patrz H. Kołakowski «Delta» 6/1975). Zasada superpozycji jest własnością silniej związaną z liniowością układu. Rozumiemy ją następująco: jeżeli  $F_1$  i  $F_2$  oznaczają dwa rozwiązania naszego problemu (oczywiście odpowiadające innym warunkom brzegowym), to każda kombinacja liniowa postaci  $aF_1 + bF_2$  ( $a, b$  dowolne stałe) jest także rozwiązaniem naszego równania (lub układu równań). Dobrym przykładem ilustrującym tę zasadę jest zjawisko interferencji fal. Wyobraźmy sobie powierzchnię stawu z dwiema trzcunami rosnącymi odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$ . Przyjmijmy, że wiatr porusza tylko trzcinę rosnącą w  $A$ . Na powierzchni rozchodzą się będą koncentryczne kręgi o środku w  $A$ . Odległości między kręgami (długość fali) zależą od częstości drgań naszej trzciny. Podobny obraz otrzymamy, gdy drgać będzie tylko druga trzcina. Dla prostoty przypomnijmy, że obie trzciny mają tę samą częstość drgań. Obraz, który otrzymamy, gdy obie trzciny będą drgały jednocześnie, jest wynikiem nałożenia się obu drgań na siebie (zasada superpozycji) i jest zupełnie różny od obrazu fal kolistych. Otrzymamy odpowiednio wzmocnienia i osłabienia fal (interferencja) wzdłuż linii daleko od trzciny przechodzących w proste.

Jak już wspominaliśmy, w przypadku ogólnym równania nieliniowe nie mają powyższych własności i dlatego analiza tych równań jest dużo trudniejsza. Pomimo wszystko pewne klasy takich równań zostały rozwiązane i przedyskutowane. Można nawet mówić o tym, że ostatnio równania nieliniowe stały się modne. Ten fakt usprawiedliwiają pewne bardzo ciekawe własności ich rozwiązań. Chcemy tutaj omówić pewne wybrane równania nieliniowe, które mają ciekawe własności, a poza tym opisują pewne zjawiska fizyczne. Zaczniemy od przykładu najlepiej zbadanego równania. Równanie to nazywane równaniem Kortewega-de Vriesa (w skrócie KdV) opisuje rozchodzenie się fal na wodzie w płytkim kanale. Można je zapisać w postaci:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + V(x, t) \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} V(x, t) = 0,$$

gdzie  $t$  oznacza czas,  $x$  zaś położenie.  $V(x, t)$  jest wychyleniem powierzchni cieczy od poziomu równowagi. Przy dyskusji naszego równania ograniczymy się do klasy rozwiązań, które znikają wraz ze wszystkimi pochodnymi gdy  $x \rightarrow \pm \infty$ , dla dowolnego  $t$ . Takie rozwiązania nazywać będziemy lokalizowalnymi. W tej klasie rozwiązań można udowodnić jednoznaczność rozwiązania problemu początkowego. Oznacza to, że istnieje tylko jedno rozwiązanie, które dla  $t = 0$  jest równe danemu warunkowi początkowemu.

Na początek rozpatrzmy pewną szczególną podklasę rozwiązań, która opisuje falę o ustalonym kształcie przemieszczającą się ze stałą prędkością  $c$ .

Inaczej mówiąc szukamy rozwiązań, o ile takie istnieją, w postaci

$$(2) \quad V(x, t) = F(x-ct).$$

Podstawiając tą zależność do równania KdV otrzymujemy

$$(3) \quad -c \frac{\partial}{\partial x} F(x-ct) + F(x-ct) \frac{\partial}{\partial x} F(x-ct) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} F(x-ct) = 0.$$

Oznaczając  $y = x-ct$  i korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej, równanie to przepiszemy w postaci:

$$-c \frac{d}{dy} F(y) + F(y) \frac{d}{dy} F(y) + \frac{d^3}{dy^3} F(y) = 0.$$

Zauważmy teraz, że równanie nasze można też napisać w postaci:

$$(4) \quad \frac{d}{dy} \left[ -cF(y) + \frac{1}{2} F^2(y) + \frac{d^2}{dy^2} F(y) \right] = 0.$$

Teraz scałkujemy obie strony tego równania względem  $y$  w granicach od  $-\infty$  do  $z$ :

$$(5) \quad -cF(z) + \frac{1}{2} F^2(z) + \frac{d^2}{dz^2} F(z) = 0.$$

W ten sposób sprowadziliśmy równanie rzędu trzeciego do równania rzędu drugiego. Teraz

mnożąc stronami przez  $\frac{d}{dz} F(z)$  i znów całkując w granicach od  $-\infty$  do  $y$  dostajemy

$$(6) \quad -cF^2(y) + \frac{1}{3} F^3(y) + \left[ \frac{d}{dy} F(y) \right]^2 = 0.$$

Równanie to jest już rzędu pierwszego i przez bezpośrednie całkowanie można je rozwiązać. Wygodniej jest jednak dokonać następnego podstawienia

$$(7) \quad F(y) = G^{-2}(y),$$

skąd otrzymujemy

$$(8) \quad \frac{d}{dy} F(y) = -2G^{-3}(y) \frac{d}{dy} G(y).$$

Podstawiając do równania (6) otrzymujemy:

$$(9) \quad -cG^{-4}(y) + \frac{1}{3} G^{-6}(y) + 4G^{-6}(y) \left[ \frac{d}{dy} G(y) \right]^2 = 0.$$

lub w prostszej postaci

$$(10) \quad -cG^2(y) + \frac{1}{3} + 4 \left[ \frac{dG(y)}{dy} \right]^2 = 0.$$

Równanie (10) przepiszemy teraz w postaci wygodnej do dalszych przekształceń.

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{G^2(y) - \frac{1}{3c}}} \frac{dG(y)}{dy} = \frac{\sqrt{c}}{2}.$$

Skorzystajmy ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej do funkcji cosinus hiperboliczny

$$(12) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Arcosh} \left( \frac{x}{\alpha} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}$$

i przepiszmy równanie (11) w postaci

$$(13) \quad \frac{d}{dy} \operatorname{Arcosh}(\sqrt{3c} G(y)) = \frac{\sqrt{c}}{2}.$$

Całkując (już po raz ostatni) względem zmiennej  $y$  w granicach od 0 do  $z$  otrzymujemy ostatecznie wynik

$$(14) \quad \operatorname{Arcosh}(\sqrt{3c} G(z)) - \operatorname{Arcosh}(\sqrt{3c} G(0)) = \frac{\sqrt{c}}{2} z.$$

Dla pełnego określenia funkcji  $G(z)$  potrzebna jest znajomość jej wartości w punkcie  $z = 0$ . W tym celu należy założyć coś o wartości funkcji  $F(z)$ . Ponieważ wiemy, że funkcja  $F(z)$  znika, gdy  $z \rightarrow \pm \infty$ , więc, jeśli nie znika tożsamościowo, to musi dla jakiegoś  $z_0$  przyjmować

ekstremum. Przyjmijmy więc  $z_0 = 0$ . Wtedy  $\left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0$ , a z równania (6) znajdujemy

$$(15) \quad F(0) = 3c.$$

Możemy teraz obliczyć wielkość  $G(0) = \frac{1}{\sqrt{3c}}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(y) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d^2 F(y)}{dy^2} = 0 \end{aligned}$$

Ponieważ  $\text{Arcosh}(1) = 0$ , wzór (14) przybiera postać

$$(16) \quad \text{Arcosh}(\sqrt{3c} G(z)) = \frac{\sqrt{c}}{2} z,$$

lub w formie równoważnej (korzystając z definicji funkcji odwrotnej)

$$(17) \quad \sqrt{3c} G(z) = \cosh\left(\frac{\sqrt{c}}{2} z\right).$$

Tak więc po długich rachunkach znaleźliśmy ostateczną postać funkcji  $F(y)$ :

$$(18) \quad F(y) = \frac{3c}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2} y\right)} = \frac{3c}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right]} = V(x, t).$$

Rozwiązanie to ma szereg ciekawych własności. Jego kształt przypomina samotne wzniesienie, które w całości porusza się z lewa na prawo z prędkością  $c$ . Ze względu na swój kształt oraz fakt, że nie zmienia się on w czasie ruchu, rozwiązanie to nosi nazwę solitonu. Nazwa ta pochodzi od angielskiego terminu „solitary wave”, co oznacza samotną falę. Najbardziej frapuje fizyków fakt, że pomimo zjawiska dyspersji (patrz dyskusja na marginesie) soliton nie rozplywa się i wykazuje własności trwałego obiektu fizycznego, żeby nie powiedzieć trwałej cząstki. Jest rzeczą ciekawą, że soliton został zaobserwowany w naturze po raz pierwszy w roku 1834, a dopiero w roku 1895 opisano go teoretycznie. Bardzo ciekawą własnością naszego solitonu jest zlokalizowanie w pobliżu maksimum. Na odległościach od maksimum większych od kilku  $x^0 = 2/\sqrt{c}$  (należy tu wyjaśnić, że od początku pracujemy w bezwymiarowym układzie jednostek) amplituda solitonu praktycznie zanika. Można więc uznać, że soliton nie znika jedynie na ograniczonym odcinku. Ostatnią ciekawą własnością solitonu jest zależność amplitudy od prędkości: im wyższy soliton tym szybciej się porusza. Ostatnio, na początku lat sześćdziesiątych, wzrosło zainteresowanie równaniem KdV w związku z różnymi od hydrodynamiki zastosowaniami (fizyka plazmy oraz teoria fal anharmonicznych w kryształach). Zaobserwowano (z początku przy pomocy rachunków na maszynach cyfrowych, a następnie rozwiązań analitycznych), że jeśli w chwili początkowej dwa solitony były daleko od siebie tak, że jeden z nich znajdował się w miejscu, gdzie amplituda drugiego była praktycznie równa zero (tylko w takim wypadku można mówić o oddzielnych solitonach), to ewolucja rozwiązania miała następujący przebieg: Soliton szybszy (który powinien znajdować się na początku po lewej stronie) dogania soliton wolniejszy, następnie oba solitony mieszają się zatracając oczywiście w tym momencie swoją charakterystyczną formę. Po pewnym czasie w układzie można zobaczyć takie same solitony jak w początkowym stadium ewolucji, jedynie z tą tylko różnicą, że soliton szybszy jest teraz po prawej stronie i ucieka do solitonu wolniejszego. Podobne zjawisko zaobserwowano doświadczalnie przy oddziaływaniu fal w plazmie. Na rysunku na marginesie pokazano wyniki tych pomiarów. Wynik ten można interpretować podwójnie: Albo soliton szybszy przechodzi bez oddziaływania przez drugi soliton, albo solitony zachowują się jak twarde kule o tej samej masie. Przy jednowymiarowym ruchu dwu doskonałe sprężystych kul podczas zderzenia kula szybsza przekazuje swój pęd kuli wolniejszej i po prostu zamieniają się one prędkościami (bez przenikania). Jak już wspominałem, znana jest analityczna postać takiego dwu-solitonowego rozwiązania (nawet postać  $n$ -solitonowego). Oczywiście rozwiązanie otrzymuje się w sposób dużo bardziej skomplikowany niż w przypadku rozwiązania jednosolitonowego. Podamy tutaj postać rozwiązania opisującego dwa solitony o prędkościach odpowiednio równych 16 i 4.

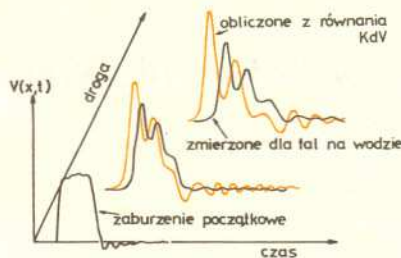
$$(19) \quad V(x, t) = 72 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{\{3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)\}^2}.$$

Przez podstawienie możemy sprawdzić, że wyrażenie (19) spełnia równanie (1). Wykreślając tę funkcję dla różnych chwil  $t$  łatwo się przekonać, że przedstawia rzeczywiście opisaną uprzednio ewolucję dwu solitonów.

Zastanówmy się teraz nad własnością superpozycji w przypadku równania KdV. Łatwo zauważyć, że jeżeli dwa rozwiązania równania KdV mają rozdzielną nośniki (nośnik oznacza zbiór punktów, w których funkcja nie zanika) to suma rozwiązań jest rozwiązaniem (po prostu wtedy iloczyn dwu różnych rozwiązań jest równy zero). Tak więc ograniczona zasada superpozycji jest spełniona. Oczywiście w obszarze oddziaływania (gdzie nośniki poszczególnych rozwiązań mają część wspólną) rozwiązanie nie jest superpozycją solitonów. Tak się składa, że solitony praktycznie mają ograniczone nośniki i dlatego można było mówić o wielosolitonowych rozwiązaniach. Omówiliśmy tutaj kilka własności rozwiązań równania KdV, które wynikają z jego nieliniowego charakteru. Są to: postać solitonowa rozwiązań (niezmiennosc kształtu), lokalizowalność oraz niezniszczalność solitonów podczas oddziaływania. W teorii liniowej skonstruowanie obiektów o powyższych własnościach byłoby niemożliwe. Chciałbym tu dodać, że znanych jest jeszcze kilka równań, których rozwiązania mają podobny charakter.

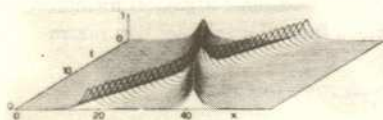
Oczywiście omówione powyżej cechy równań nieliniowych nie są jedynymi możliwymi.

W kolejnym artykule postaram się opisać bardzo ciekawe własności innych równań tego typu.

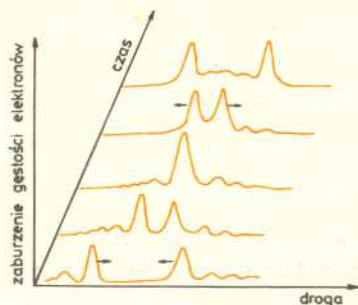


Powstawanie solitonów na wodzie. Porównanie rozwiązania równania KdV z doświadczeniem.

W teorii liniowej zaburzenie o dowolnym kształcie może być traktowane jako superpozycja fal o różnych częstotliwościach (paczka falowa). W większości ośrodków (ośrodku dyspersyjnym) fale o różnych częstotliwościach rozchodzą się z różną prędkością (zjawisko dyspersji prędkości). Tak więc podczas ruchu paczki falowej różne składowe mają odmiennie prędkości i zaburzenie zmienia swój kształt (rozplywanie się paczki falowej). Zachowanie rozwiązania równania KdV jest diametralnie różne, choć powierzchnia wody jest ośrodkiem dyspersyjnym.



Oddziaływanie solitonów obliczone z równania KdV.



Krzywe doświadczalne opisujące zderzenie solitonów w plazmie. Zjawisko to opisywane jest równaniem nieco innym niż równanie KdV.