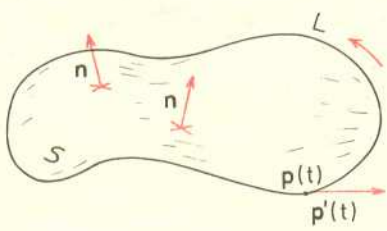


Rys. 5

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego. Jeśli \mathcal{S} jest gładką powierzchnią zamkniętą, $\mathbf{n}(x, y, z)$ wektorem jednostkowym zewnętrznie prostopadłym do tej powierzchni w punkcie (x, y, z) , \mathcal{V} — bryłą, której brzegiem jest \mathcal{S} (rys. 5) i wreszcie $\mathbf{W} = (P, Q, R)$ polem wektorowym na \mathcal{V} takim, że funkcje P, Q, R są różniczkowalne, to

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{W} d\mathcal{V}.$$

Innymi słowy, wartość całki po \mathcal{V} pewnej funkcji zależnej od pochodnych \mathbf{W} (dywergencji tego pola) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości pola \mathbf{W} na brzegu \mathcal{S} bryły \mathcal{V} . Zaskakujące?



Rys. 6

Twierdzenie Stokesa. Niech \mathcal{L} będzie gładką krzywą zamkniętą o ustalonej orientacji (kierunku obiegu) ograniczającą powierzchnię \mathcal{S} w przestrzeni trójwymiarowej (rys. 6), a $\mathbf{W} = (P, Q, R)$ polem wektorowym określonym na \mathcal{S} takim, że funkcje P, Q, R są różniczkowalne. Niech $\mathbf{n}(x, y, z)$ będzie wektorem jednostkowym prostopadłym do \mathcal{S} w punkcie (x, y, z) o zwrocie wybranym tak, że dla obserwatora siedzącego na jego końcu krzywa \mathcal{L} obiegana jest w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Niech wreszcie $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$, będzie równaniem parametrycznym krzywej \mathcal{L} (wtedy wektor $\mathbf{p}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$ jest styczny do krzywej \mathcal{L} w punkcie $(x, y, z) = \mathbf{p}(t)$). Przy tych założeniach

$$\int_{\langle a, b \rangle} \mathbf{W} \cdot \mathbf{p}' dt = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{W} d\mathcal{S}.$$

A więc — wartość całki po powierzchni \mathcal{S} z pewnej funkcji zależnej od pochodnych \mathbf{W} (tzn. z iloczynu skalarnego rotacji \mathbf{W} i wektora \mathbf{n}) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości pola \mathbf{W} na brzegu powierzchni \mathcal{S} (tj. na krzywej \mathcal{L}). Dziwne?

I trzecie twierdzenie. Jeśli punkty a, b są końcami odcinka \mathcal{J} , na którym określona jest różniczkowalna funkcja F , to

$$F(b) - F(a) = \int_{\mathcal{J}} F'(t) dt.$$

A więc wartość całki po krzywej \mathcal{J} z pewnej funkcji zależnej od F (to jest z jej pochodnej) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości funkcji F na brzegu (to jest na końcach) tej krzywej. Dziwne? Nie bardzo. Jest to dobrze znany wzór na obliczanie całki oznaczonej.

Dwa poprzednie wzory nie są dziwniejsze od tego. Jedynie — znacznie bardziej skomplikowane.



Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 35. Przypuśćmy, że mamy dwie takie same rolki obracające się w przeciwnych kierunkach (ku sobie) ze stałą prędkością kątową Ω i położoną na nich deskę drewnianą o ciężarze P . Deska leży poziomo, a obracające się rolki ślizgają się pod nią. Współczynnik tarcia dynamicznego rolek o deskę wynosi f . W chwili początkowej deska została umieszczona na rolkach w ten sposób, że jej środek ciężkości znalazł się na prawo od punktu leżącego w połowie odległości między osiami rolek.

Opiszcie ruch deski.
Rozwiązania szukajcie na str. 2

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 103. Ile jest na szachownicy $n \times n$ różnych kwadratów złożonych z (całych) pól szachownicy? (Dwa kwadraty uważamy za różne, gdy zbiory pól wchodzących w ich skład są różne.)

Rozwiązanie na str. 5

M 104. Rozwiązać równanie $\cos^n x - \sin^n x = 1$, gdzie n jest liczbą naturalną.
Rozwiązanie na str. 17

M 105. Udowodnić, że dla $n \geq 3$ zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Rozwiązanie na str. 15



W. Mnich.