

Dr hab. Łukasz A. TURSKI



Kilka lat temu „Physics Today” zamieściło artykuł pt. „Zmęczyły ci bieguny Reggego, strefy Brillouina itp. — spróbuj tego”. Tym „czymś” była teoria i praktyka roweru nie nadającego się zupełnie do jazdy. W niniejszym artykule chciałbym zająć się nie tyle fizyką „nieujędzalnego” roweru, ile, chyba również pasjonującym zagadnieniem teoretycznego „baloniarstwa”, a mianowicie tym, jakie jest przyspieszenie, z którym startują balony. Oczywiście wiemy, że ruchem balonów, tak jak i ich zwycięskich konkurentów — aeroplanów, rządzą prawa mechaniki ośrodków ciągłych (MOC) i że ta dyscyplina wiedzy to archaizm zupełnie nic nie mający wspólnego ze współczesną fizyką. Ten, niestety, dość powszechny wśród fizyków pogląd jest całkowicie mylny i, jak zobaczymy, nasze zagadnienie balonowe doprowadzi nas do pojęcia szeroko stosowanego we współczesnej fizyce np. w teorii ciała stałego, a mianowicie — pojęcia masy efektywnej. Tyle, że w MOC-y pojęcie to znane było od początków ubiegłego stulecia.

Hydrodynamika i aerodynamika, dwa podstawowe działy MOC-y, są bardzo trudnymi działami ludzkiej ciekawości i, co tu ukrywać, do dziś borykają się z wielu fundamentalnymi kłopotami. Ot, chociażby tym, że pomimo zastosowania Bóg wie jakich metod matematycznych do dziś nie udało się udowodnić ogólnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równania Naviera-Stokesa — podstawowego równania opisującego dynamikę cieczy lepkiej. Ba, cóż mówić o równaniu Naviera-Stokesa, jeżeli do dziś nie wiadomo, co było przyczyną krew w żyłach mrożącej historii szyb okiennych w superwieżowcu kompanii ubezpieczeniowej Johna Hancocka. (Podobna historia, acz na mniejszą skalę, wydarzyła się oknom Klubu MPiK w domu towarowym Junior w Warszawie i, być może, co starsi Czytelnicy „Delt” widzieli „to to” na własne oczy). Otóż, kiedy ten superwieżowiec, (IV str. okł.), ulokowany w centrum Bostonu, został szczelnie zamknięty i ruszyła jego super-klimatyzacja, to nagle, pod wpływem wiejących nad oceanu wiatrów cudowne, zielono-niebieskie przeciwsloneczne szyby okienne zaczęły wyskakiwać z ram i z cichym świstem spadać w dół na miasto (szyby były porządnie „okitowane”). Dobry Bóg Towarzystw Ubezpieczeniowych czuwał i, o ile wiem, nikt nie został zgilotynowany przez te fruwające kawały szkła. Puste oczodoły okien zabijano dyktą aż do momentu, gdy do akcji wkroczyła... straż pożarna — bo przecie tyle dykty stanowi istotne zagrożenie pożarowe. W tunelu aerodynamicznym, należącym do sławnej bostońskiej uczelni MIT (Massachusetts Institute of Technology) zbudowano nieliczym nakładem kosztów, acz ku ucieście spragnionych kontraktów badawczych uczonych, model budynku i całej otaczającej go dzielnicy. Nikt nie wie, ile pieniędzy wydano na symulacje numeryczne (na maszynach cyfrowych MIT) przepływów aerodynamicznych powietrza wokół wieżowca itp, aż w końcu zaufano majstrom i zamontowano znacznie grubsze szyby. Dlaczego teraz nie wypadają? Ba, kto to wie? MOC kryje w sobie wiele ciekawych i zaskakujących historii, jak właśnie ta o balonach.

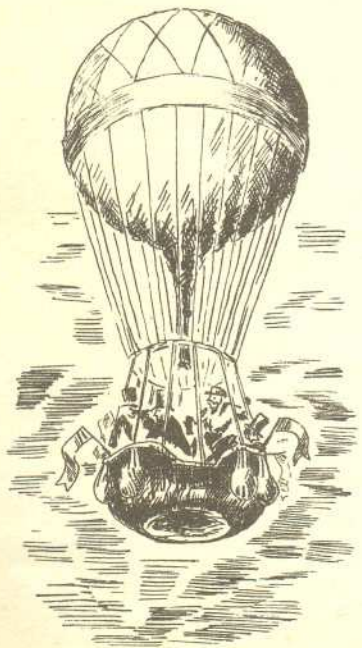
Zacznijmy od dwu zadań. Zadanie pierwsze podstawowe:

Wyobraźmy sobie balon kulisty, którego całkowita masa równa jest $1/10$ masy wypartego powietrza. Pytanie: jakie jest przyspieszenie tegoż balonu w momencie startu?

Dругie zadanie (bardziej „naukowa” wersja pierwszego):

Wyobraźmy sobie wielkie akwarium wypełnione wodą, wewnątrz akwarium umieszczamy kulę wykonaną z nieważkiego materiału i pomijamy zupełnie występowanie sił ciężkości. Całemu akwarium nadajemy przyspieszenie a względem laboratoryjnego układu odniesienia. Pytanie: ile wynosi przyspieszenie kuli względem laboratorium? (Doświadczenie tego typu — jak powyższe zadanie — zostało przeprowadzone przez wybitnego matematyka Birkhoffa i Caywooda; badano w nim ruch niewielkich pęcherzyków powietrza w wodzie).

Czytelników zachęcam do próby rozwiązania tych zadań bez czytania dalszej części artykułu i do nadesłania rozwiązań do redakcji. Spośród autorów najoryginalniejszych rozwiązań rozlosujemy kilka nagród w postaci świeżej wody do akwarium.





Jak przystąpilibyśmy do rozwiązania pierwszego zadania? Oczywiście, najpierw trzeba obliczyć siłę działającą na balon: wynosi ona, zgodnie z prawem Archimedesa, $F_w = 9M_b g$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Co dalej? Trzeba wstawić siłę F_w do równania ruchu, a to, zgodnie z prawem Newtona, powinno mieć postać: $M_b \cdot a = F_w$, gdzie M_b jest masą balonu. Korzystając z warunków zadania otrzymujemy: $a = 9g$. Ponieważ wiemy, że piloci balonów nie przyjmują przed startem pozycji horyzontalnej ani też nie noszą specjalnych przeciwprzeciążeniowych strojów jak kosmonauci, to coś jest niedobrze z naszym rozwiązaniem. Nim powiem co — cofnijmy się wstecz w czasie, do końca XVIII wieku. Uczni w owym czasie pasjonowali się dokładnym wyznaczaniem wartości przyspieszenia ziemskiego g . Praktycznym zagadnieniem będącym partnerem tego „problemu poznawczego” było dokładne wyznaczenie okresu drgań wahadła używanych w precyzyjnych chronometrach. W 1776 roku Du Buat przeprowadził pomiary okresu drgań wahadła zbudowanego z „nieważkiej” nici zakończonej sferycznym ciężarkiem zrobionym z materiału o gęstości ρ i pełnej masie $M = 4/3 \pi R^3 \rho$, gdzie R jest promieniem ciężarka. Du Buat stwierdził istotne odchylenia okresów drgań od przewidywanych teoretycznie; zauważył przy tym, że jest w stanie dopasować swoje wyniki do teorii, jeżeli założy, że ciężarek wahadła ma masę nieco większą niż M , co więcej, ten dodatek do masy zdawał się zależeć od tego czy wahadło poruszało się w powietrzu, czy w innym gazie. Pomińmy fakt, że w opisie ruchu wahadła należy uwzględnić tarcie zawieszania, wagę nici itp. i zajmijmy się teorią doświadczenia Du Buat'a. Jak wiemy, równanie ruchu wahadła ma postać:

$$Ml\ddot{\theta} = Mg \sin \theta,$$

gdzie θ jest kątem wychylenia wahadła, l — długością, a M — masą, a dwie kropki oznaczają drugą pochodną względem czasu.

Dla małych kątów θ okres drgań wahadła dany jest znanym wzorem $T^2 = 4\pi^2 l/g$. Ponieważ ruch wahadła odbywa się w powietrzu, należy uwzględnić siłę wyporu działającą na ciężarek wahadła. Prowadzi to do zmiany równania ruchu polegającej na pomnożeniu prawej strony przez współczynnik $(1 - \rho'/\rho)$, gdzie ρ' jest gęstością powietrza. W 1832 roku Baily przeprowadził pomiar wpływu tej poprawki na okres drgań wahadła i stwierdził, że teoretyczna różnica okresów (rzędu 5 minut na dzień) nie wystarcza do uzyskania dobrej zgodności z doświadczeniem. W tej sytuacji na arenę wkroczyli teoretycy i w 1833 roku Green (tenże Green od twierdzeń całkowitych Greena, Ostrogradzkiego, Gaussa, Stokesa i innych) wykazał, że w równaniu ruchu wahadła należy wprowadzić jeszcze jedną poprawkę polegającą na zastąpieniu masy wahadła M po lewej stronie równania ruchu przez masę \dot{M} , którą nazwał masą wirtualną. Uwzględnienie tej zmiany prowadzi do wydłużenia okresu drgań wahadła

w stosunku 1: $\sqrt{1 + \frac{\dot{M} - M}{M}}$.

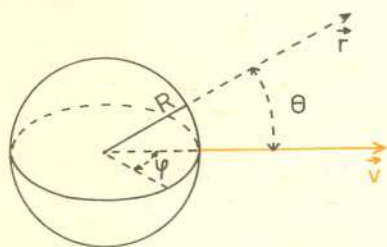
Teoria Greena dawała wzór na masę wirtualną w postaci:

$$\dot{M} = M + k\rho'V,$$

gdzie V jest objętością ciężarka, a k pewną liczbą, zależną od kształtu ciężarka. Porównywanie okresów drgań wahadła z przewidywaniami teoretycznymi sprowadza się więc do porównywania doświadczalnej wartości współczynnika k z teoretycznymi. Z doświadczeń Du Buata dla sferycznego ciężarka uzyskano wynik: $k = 0,45 \div 0,67$. Nie jest to wynik zgodny z przewidywaniem teoretycznym: $k = 1/2$. Proszę pamiętać, że w czasach, o których mowa, dokładność doświadczeń mechanicznych była niewiele mniejsza niż dzisiaj. Analiza wyników doświadczeń, o których mówimy, nasunęła Stokes'owi pomysł, że coś jeszcze jest pominięte przy analizie wpływu ośrodka na ruch wahadła. Właśnie w ten sposób odkrył on swoje prawo wiążące lepkość z dodatkową siłą działającą na ciało poruszające się w płynie. Zauważamy, że już w początkach XIX wieku fizycy byli gotowi „psychicznie” do posłużenia się, w opisie ruchu cząstki w ośrodku, trickiem polegającym na tym, że część wpływu ośrodka na ruch cząstki zastępuje się przez wprowadzenie „fikcyjnej” cząstki poruszającej się pod wpływem takiej samej siły, ale mającej inną masę. W dzisiejszej fizyce taką zmienioną masę nazywamy masą efektywną i pojęcie to powszechnie stosujemy np. w fizyce ciała stałego, gdzie badając ruch elektronu w kryształach półprzewodnikowych, zastępuje się masę elektronu m przez masę efektywną \dot{m} , która dla wielu materiałów może być mniejsza niż masa elektronu w próżni.

Jak wyjaśnić tę konieczność zastąpienia masy ciężarka wahadła, masy balonu itp. przez masę efektywną? Każdy z Czytelników na pewno trzymał kiedyś w ręku wiosło. Otóż łatwo sobie przypomnieć, że na to, aby wykonać pełne pociągnięcie wiosłem bez zanurzania pióra w wodzie, trzeba do rękojeści wiosła przyłożyć mniejszą siłę niż wtedy, gdy wiosło zanurzamy w wodzie. Wyobraźmy sobie sytuację, że nie wiemy czy wiosło zostało zanurzone w wodzie, czy nie; wiemy tylko, że musimy wykonać pociągnięcie wiosłem z określoną prędkością. Otóż — raz „opór” wiosła na nadanie mu tej samej prędkości będzie większy (wiosło w wodzie) niż za drugim razem (wiosło w powietrzu).

W pierwszym przypadku wiosło jest „cięższe” tj. wiosło o odpowiednio większej masie, poruszające się w powietrzu stawiać będzie nam taki sam „opór” jak „prawdziwe”, poruszające się w wodzie. Powyższy przykład zawiera podstawową ideę fizyczną, leżącą u podstaw zrozumienia pojęcia masy efektywnej. Powstaje pytanie, jak obliczyć tę „dodatkową” masę potrzebną w naszym „suchym” opisie „mokrego” wiosłowania? Dla wiosła problem ten jest niebywale skomplikowany. Oprócz dość wstępnego kształtu wiosła, wykluczającego jakiegokolwiek rachunki analityczne, przy opisie ruchu wiosła trzeba uwzględnić efekty związane z powierzchnią cieczy itp. Dla ruchu obiektów sferycznych (balon) w mocno wyidealizowanym modelu ośrodka, jakim jest nielepka, nieściśliwa ciecz (ciecz, w której gęstość płynu w danym punkcie przestrzeni pozostaje stała podczas ruchu płynu), wszystkie rachunki można przeprowadzić do końca w elementarny sposób. Musimy pamiętać, że jest to bardzo uproszczony opis, ale całkiem sensowny właśnie dla opisu ruchu balonów w początkowej fazie lotu, a także i dla innych, fizycznie ciekawszych zjawisk np. ruchu dodatnio naładowanych jonów w nadciężkim helu.



$$u(r) = \frac{1}{2} v R^3 \nabla \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$r \geq a,$$

$$r \cdot u(r) \Big|_{r=R} = (r \cdot v) \Big|_{r=R}$$

$$u(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Przystąpmy wreszcie do wykonania tych rachunków. Na rysunku mamy przedstawioną szkielet sytuację. Sferyczny balon — kula o promieniu R porusza się z prędkością v w płynie o gęstości ρ' . Wygodnie jest posługiwać się układem współrzędnych biegunowych: r, θ, φ . Przy czym, w związku z założeniem o nielepkości płynu, możemy łatwo przekonać się, że składowa prędkości płynu u_φ jest równa zero (nie ma mechanizmu oddziaływania obracającej się kuli z nielepką cieczą). Pozostałe dwie składowe pola prędkości: u_r i u_θ łatwo jest znaleźć, pamiętając, że muszą one na powierzchni kuli spełniać warunek brzegowy równości składowych normalnych płynu i kuli. Otrzymujemy więc następujące wyrażenia na te składowe: $u_r = R^3 v \cos \theta / r^3$, $u_\theta = R^3 v \sin \theta / 2r^3$.

Znając prędkość płynu u możemy obliczyć jego energię kinetyczną. W tym celu należy zauważyć, że energia kinetyczna elementu objętości płynu ΔV równa jest $\frac{1}{2} \rho' u^2$. Chcąc obliczyć T_p — pełną energię płynu, należy zsumować wkłady pochodzące od poszczególnych elementów objętości płynu. Mamy wtedy

$$T_p = \sum_{\Delta V} \frac{1}{2} \rho' u^2 \rightarrow \frac{1}{2} \rho' \int d^3x u^2.$$

Całkowanie potrójne w powyższym wzorze musimy wykonać po całej objętości wypełnionej płynem, tj. przy naszym założeniu nieskończonego ośrodka, po całej przestrzeni z wyjątkiem sferycznej „dziury” o promieniu R , zajętej przez nasz balon. Całkowanie powyższe jest elementarne i przebiega, jak następuje:

$$T_p = \frac{1}{2} \rho' \int (u_r^2 + u_\theta^2) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \pi \rho' v^2 R^6 \int_{r=R}^{\infty} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta \left[\frac{\cos^2 \theta}{r^6} + \frac{\sin^2 \theta}{4r^6} \right] d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \rho' R^3 \right) v^2 = \frac{1}{2} M_1 v^2; \quad M_1 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \rho' R^3 \right).$$

Jak widzimy, energię kinetyczną cieczy możemy zapisać w postaci energii kinetycznej, jaką miałaby cząstka poruszająca się w próżni z tą samą prędkością, co nasz balon, ale mająca masę równą $1/2$ masy wypartego przez balon płynu.

Pełna energia kinetyczna układu balon plus płyn równa jest $T = T_p + T_b = \frac{1}{2} (M_b + M_1) v^2$ i tym samym równa jest energii kinetycznej cząstki o masie

$M =$ masa balonu plus połowa masy wypartej przez balon cieczy. Jest to bardzo ciekawy i elegancki wynik, który stał się podstawą do rozumowania Greena dotyczącego ruchu wahadła.

Rozwiązanie zadania M 109. Przez punkty danego zbioru poprowadzimy proste równoległe o danym kierunku oraz proste do nich prostopadłe. Odległość skrajnych prostych równoległych nie przekracza 1, a więc cały zbiór zawarty jest w prostokącie o bokach długości nie większej od 1; stąd wynika, że jest zawarty w kwadracie o boku długości 1.

Obliczenie energii kinetycznej płynu, wywołanej ruchem niesferycznych obiektów, jest o kilka „rzędów wielkości” bardziej skomplikowane. Przede wszystkim należy znaleźć pole prędkości płynu u , spełniające odpowiednie warunki brzegowe, no i oczywiście, obliczenie całki potrójnej we wzorze na T przestaje być igraszką. Można jednak wykazać następujące, ważne twierdzenie. Jak wiemy, każda bryła sztywna opisana jest przez sześć stopni swobody (trzy związane są z ruchem postępowym, a trzy z obrotami). Oznaczamy odpowiadające tym stopniom swobody współrzędne jako: q_1, \dots, q_6 . Odpowiednie prędkości oznaczymy jako: $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_6$. Twierdzenie, o którym mowa, orzeka, że energia kinetyczna płynu T_p jest formą kwadratową prędkości \dot{q}_i , a współczynniki tej formy zależą wyłącznie od q_i . Możemy więc napisać:

$$T_p = \sum_{a,b=1}^6 M_1^{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b.$$

Można również podać skomplikowane wyrażenia na obliczanie współczynników M_1^{ab} . W ogólnym przypadku pełna energia kinetyczna układu płyn i kula jest więc formą kwadratową prędkości, a co za tym idzie, nie można przypisać naszej fikcyjnej cząstce jednej masy skalarnej, ale całą tablicę mas (współczynniki M_1^{ab}); mówimy wtedy o tensorowej masie efektywnej. I znowu np. w fizyce ciała stałego często mówi się o tensorowej masie efektywnej nośników ładunku. W ciele stałym ta tensorowość wiąże się z geometrią pasm energetycznych, dozwolonych dla nośników ładunku przez symetrie sieci krystalicznej, skład kryształu itp.

W mechanice teoretycznej udawadnia się, że równania ruchu dla układu można zapisać w postaci tzw. równań Lagrange’a. Równania te mają postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a.$$

W równaniach tych T jest pełną energią kinetyczną układu. Q_a to tzw. siły uogólnione. W konkretnym przypadku ruchu naszego balonu Q_a to po prostu składowe wektora siły wyporu. Korzystając z prawa Archimedesesa możemy łatwo obliczyć te siły. Dla kuli jedynymi stopniami swobody, które trzeba uwzględnić, są te, które wiążą się z ruchem postępowym. Współrzędne q_a w tym wypadku to współrzędne środka kuli, a prędkości \dot{q}_a to po prostu składowe wektora prędkości kuli $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}$. Wstawiając nasze wyrażenie na energię kinetyczną płynu plus kula oraz siłę wyporu do równań Lagrange’a, uzyskujemy równanie ruchu balonu w postaci:

$$(M_b + M_1) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}_w.$$

Jest to równanie ruchu dla „cząstki” o masie efektywnej \dot{M} . Gdybyśmy analogicznie rozumowanie, jak powyżej, przeprowadzili dla wahadła, to otrzymalibyśmy, omawiane uprzednio, równanie Greena. Możemy teraz nareszcie rozwiązać do końca zadanie o balonie. Znamy już siłę wyporu F_w , a masa efektywna wynosi teraz $(1/10 + 5/10)$ masy wypartego powietrza. Równanie ruchu ma więc postać: $(6/10)a = (9/10)g$, skąd: $a = (3/2)g$. Jest to całkiem sensowne przyspieszenie i każdy, kto widział startujący balon, gotów jest „kupić” ten wynik. Tak więc, to masa efektywna balonu gwarantuje nam to, że balon nie wzlatuje w górę jak rakietka. Trzeba podkreślić, że nasza analiza jest słuszna tylko dla bardzo krótkiego okresu czasu, zaraz po starcie balonu. Dla pełnego opisu trzeba by uwzględnić wiele dodatkowych efektów, np. niesferyczność (gondola, w której siedzą aeronauci) itp.

Ponieważ mają Państwo zapewne dość tej matematyki, czas już zakończyć ten artykuł. Starłem się w nim przekonać Państwa, że w MOC-y pojęcie masy efektywnej, tak dziś powszechnie stosowane, narodziło się znacznie wcześniej niż w innych działach fizyki. Mam nadzieję, że ci spośród Czytelników, którzy będą teraz czytać poważne dzieła naukowe, w których napotkają takie to terminy, jak: masa polowa elektronu, renormalizacja masy, masa polaronu, masa efektywna nośników ładunku, ciężkie i lekkie elektrony itp.; będą mogli powiedzieć: phi, to nic takiego nowego, to jest to, dlaczego balony latają wolno. Aha, no i mam nadzieję, że przekonałem Państwa o tym, iż MOC to ciekawa dyscyplina fizyki.

Można np., korzystając z jej praw, udowodnić, że samoloty w ogóle nie mogą latać. Ale o tym to może kiedy indziej.



SZCZĘŚLIWEGO
NOWEGO
ROKU!