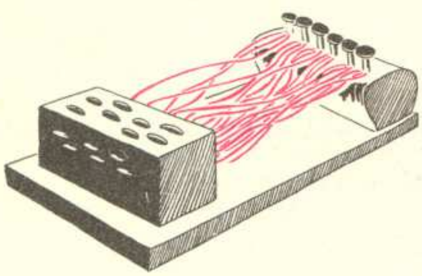
mała delta

Metoda kresek — czyli jak wykorzystać relacje do obliczeń

POPLĄTANE PRZEWODY



Wyobraźmy sobie fragment pewnego urządzenia o następującej konstrukcji. Na wieczku jednego pudełka umocowano 6 końcówek i do każdej z nich podłączono 3 przewody prowadzące do wnętrza drugiego, zakrytego pudełka. W pokrywie zakrytego pudełka są otwory. Zaglądając przez nie do środka można sprawdzić, że wewnątrz znajdują się końcówki. Nie da się ich wprawdzie policzyć, lecz widać, że do każdej z nich podłączono dwa przewody. Ile końcówek jest wewnątrz tego pudełka? Zadanie jest oczywiście dziecinnie łatwe, ale ilustruje pewien schemat powtarzający się w wielu ciekawych zadaniach kombinatorycznych. Rozwiążmy je zatem. Najpierw liczymy przewody. Jest ich 18, bo $6 \cdot 3 = 18$. Wobec tego w zakrytym pudełku musi być 9 końcówek, bo $18:2 = 9$.

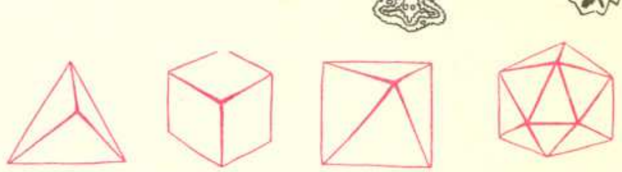
WIELOŚCIANY PLATOŃSKIE

Dwunastościan foremny zbudowany jest w ten sposób. Wszystkie ściany (jest ich 12) to pięciokąty foremne, przy czym w każdym wierzchołku bryły stykają się 3 takie pięciokąty. Ile wierzchołków liczy ten wielościan? Zwykle liczymy tak. Dwanaście ścian po pięć wierzchołków to 60 wierzchołków. Ponieważ jednak każdy wierzchołek policzyliśmy trzykrotnie, wobec tego bryła liczy 20 wierzchołków (bo $60:3 = 20$). Ktoś pedantyczny mógłby zarzucić nam nieścisłość w wysławianiu się. Raz twierdzimy że wierzchołków jest 60, później okazuje się, że tylko 20. Nasuwa to podejrzenie, że całe rozumowanie było wątpliwe. Odwołajmy się wobec tego do rysunkowego schematu. Rysunek przypomina nasze poplątane przewody. Wyjaśnić należy w jaki sposób poprowadzone są kreski. Otóż każdą ścianę łączymy kreską z tymi wierzchołkami, do których ona przylega. Nie trzeba jednak wnikać w szczegóły. Wystarczy zauważyć, że z każdej ściany musi wychodzić 5 kresek, a z każdego wierzchołka 3 kreski. Wiedząc, że ścian jest 12, liczymy wierzchołki w ten sam sposób jak liczyliśmy końcówki w zakrytym pudełku.

A gdzie tutaj są wspomniane w tytule relacje? W tym przykładzie była mowa o relacji przylegania wierzchołka i ściany wielościanu. Graficzną ilustracją tej relacji są kreski.

W podobny sposób da się policzyć, ile wierzchołków liczą pozostałe wielościany platońskie. Krawędzie tych wielościanów i przekątne wielokątów wypukłych przeliczamy według identycznego schematu.

A oto zupełnie inny przykład.

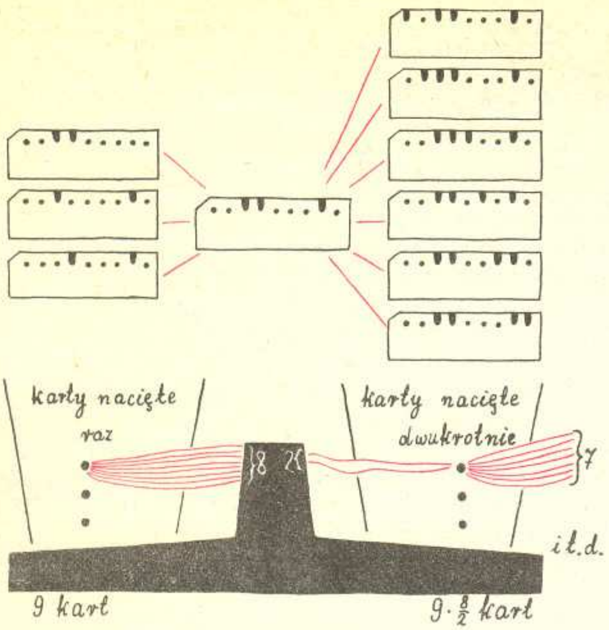


czworościan foremny | sześcian | ośmiościan foremny | dwudziestościan foremny

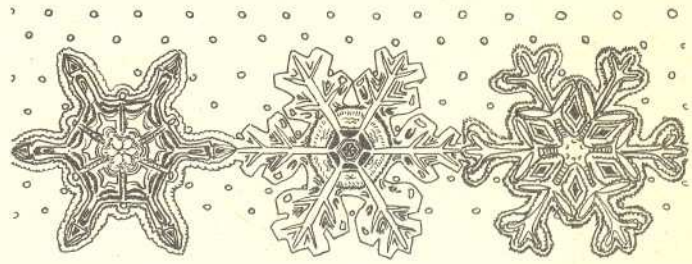
DZIURKOWANIE KART Z PERFOROWANYM BRZEGIEM ALBO PODZBIORY

W pewnej kartotece każda karta ma 8 dziurek — a więc 9 miejsc do nacinania. Na ile sposobów można wyciąć dwa, trzy, cztery i pięć miejsc na karcie?

W zadaniu tym wykorzystamy pewną relację: dwie karty są ze sobą w naszej relacji (a więc połączymy je kreską), jeśli we wszystkich miejscach poza jednym są nacięte identycznie.

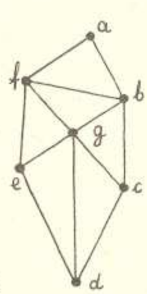


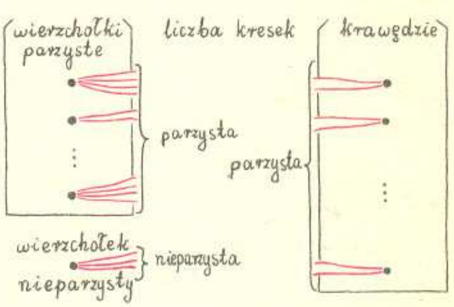
Karta nacięta trzykrotnie jest w tej relacji z dziewięcioma innymi kartami. Jak pokazuje rysunek, trzy z nich to karty nacięte dwukrotnie a pozostałe sześć to karty nacięte czterokrotnie.
Oczywiście jedno nacięcie wykonać można na 9 sposobów. Rozwiązać nasze zadanie metodą kresek jest już zupełnie łatwo.
A skąd w podtytule wzięły się podzbiory? Proste — naciąć kartę trzykrotnie to spośród dziewięciu miejsc wybrać trójelementowy podzbiór.
I jeszcze jeden przykład.



PARZYSTE I NIEPARZYSTE WIERZCHOŁKI GRAFU

Figurę złożoną z wierzchołków i krawędzi, jak na rysunku, będziemy nazywać grafem.
Wierzchołek grafu nazwiemy parzystym, gdy styka się z parzystą liczbą krawędzi; nieparzystym, gdy styka się z nieparzystą ich liczbą. W naszym przykładzie parzyste są wierzchołki: a, b, f, natomiast nieparzyste c, d, e, g.
Spróbujcie narysować graf, który miałby tylko jeden wierzchołek nieparzysty, a pozostałe parzyste.
Trudne, prawda? Pokażemy, że jest to zadanie niewykonalne.
Wszystko wyjaśnia metoda kresek. Relacja, jaką będziemy rozpatrywać, to oczywiście przyleganie krawędzi do wierzchołka. Kreski łączą więc wierzchołek z przylegającymi do niego krawędziami i na odwrót.



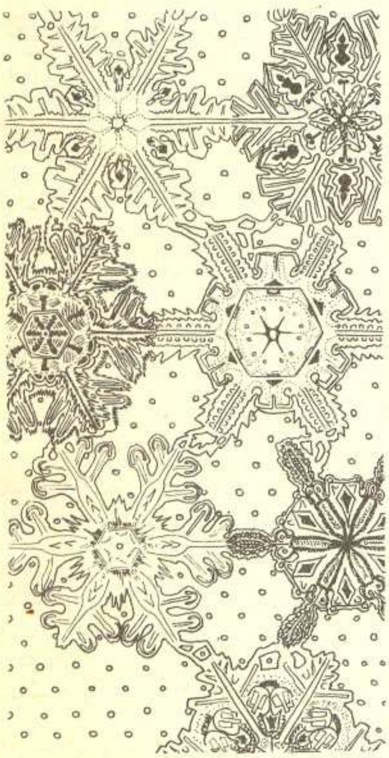


Zanalizujemy schemat interesującego nas grafu z jednym tylko wierzchołkiem nieparzystym. Z jednej strony, biorąc pod uwagę wierzchołki, kresek musi być nieparzysta ilość. Z drugiej strony, biorąc pod uwagę krawędzie (każda ma dwa końce, a więc przylega do dwóch wierzchołków) kresek jest ilość parzysta. Rysunek nasz ilustrowałby sytuację niemożliwą. Nie ma grafu, który ma tylko jeden wierzchołek nieparzysty.

Zadanie. Patrząc na rysunki wielościanów archimedesowych i wykorzystując podane informacje obliczcie, ile liczą one wierzchołków i krawędzi.

Czy umiecie pytać?

Przechodzimy obojętnie wokół dziwów. Nie zwracamy na nie uwagi. Są zbyt znane, codzienne. Czy umiemy je zauważyć? Czy potrafimy zadać pytanie dlaczego? jak? Czy potrafimy dojrzeć niezwykłość otaczających nas zjawisk? Spróbujmy. Proponujemy zabawę w stawianie pytań. Im prostszych, bardziej codziennych zjawisk będą dotyczyły, tym lepiej. Należy przełamać przyzwyczajenia i na wszystko patrzeć tak, jakby się po raz pierwszy zobaczyło świat. Pytania nadsyłajcie na kartkach pocztowych. W każdym numerze zamieścimy kilka naszym zdaniem najciekawszych wraz z nazwiskiem autora. Te najciekawsze z najciekawszych nagrodzimy książkami. Może zdarzą się pytania, na które nikt nie zna odpowiedzi, może będzie warto poświęcić poruszonemu tematowi osobny artykuł.
To co uważamy za najcenniejsze to umiejętność widzenia zjawisk i stawiania pytań — jest to przecież podstawa wszelkiej pracy naukowej. A oto kilka pytań jakie przychodzą do głowy, niektóre wybrane są z Waszych listów:
— dlaczego w herbacie mieszanej łyżeczką fusy gromadzą się w środku?
— dlaczego małe kropelki wody tworzące mgłę wiszą w powietrzu, a nie opadają na ziemię?
— jaką pajęczynę utkałby pająk w laboratorium kosmicznym w stanie nieważkości?
— niektóre lekarstwa wydziela się kroplami. Czy wielkość kropli zależy od rodzaju cieczy?
— co powoduje, że soki dopływają do najwyższych gałęzi drzewa? Gdzie jest pompa, która je tłoczy?



Bawimy się w badania

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, czy wielkość kropli zależy od jej rodzaju? Odpowiedzi poszukamy na drodze doświadczalnej. W tym celu zgromadzimy urządzenia i materiały:

— co najmniej dwie różne ciecze, na przykład wodę i olej jadalny,
— naparstek lub podobnej wielkości naczyńko, może być po lekarstwie,
— nadłamaną zapałkę, która posłuży jako kroplomierz.

Wykonanie doświadczenia ilustruje rysunek. Ostrożnie kapiąc i licząc krople napełniamy naczyńko cieczą do określonego poziomu. Im więcej kropel zmieści się, tym mniejsze są krople. Liczymy krople potrzebne do zapełnienia w ten sam sposób wybranego naczynia każdą badaną cieczą. Porównując liczby kropel powinniśmy umieć odpowiedzieć na postawione pytanie. Ostrożnie jednak z wyciąganiem wniosków. Przeprowadzenie po jednym pomiarze dla każdej cieczy nie wystarcza:

— mogliśmy się pomylić w liczeniu,
— mogliśmy źle uchwycić chwilę, w której należy przerwać napełnianie naczynia,
— powierzchnia różnych cieczy wygląda inaczej, jednej jest wypukła, innej może być wklęsła, trudno określić czy naczynie jest już pełne,
— mogła ręka drgnąć i kilka kropel oderwało się mniejszych niż powinny,
— mogło zdarzyć się wiele rzeczy, które ostatecznie zmieniły ilość kropel w naczyniu.

Pomyłki w liczeniu można uniknąć. Drgnięcia ręki trudniej, wpływu zaś innych przypadkowych czynników jeszcze trudniej. Jeżeli nie możemy uniknąć ich wpływu, to skorzystajmy z tego, że są przypadkowe. Przypadkowe wpływy powinny się znosić w wielu powtórzonych doświadczeniach.

Nie da się w ten sposób usunąć błędów systematycznych wywołanych np. różnym kształtem powierzchni cieczy, ale błędy te nie będą duże, jeśli naczynie nie jest zbyt małe.

Powtórzmy więc doświadczenie z każdą cieczą kilka razy, na przykład pięć. Oto przykładowe wyniki:

Nr doświadczenia	liczba kropel I cieczy	liczba kropel II cieczy
1	120	201
2	115	189
3	125	195
4	130	215
5	100	180

Z każdej serii pomiarów obliczamy średnią liczbę kropel potrzebną do wypełnienia naczynia.

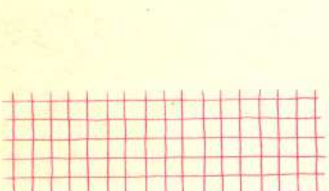
$$N_1 = \frac{120+115+125+130+100}{5} = \frac{590}{5} = 118$$

$$N_2 = \frac{201+189+195+215+180}{5} = \frac{980}{5} = 196$$

Im więcej razy powtórzymy doświadczenia, tym bardziej oswobodzimy się od wpływu czynników przypadkowych. Całkowicie oswobodzić się od ich wpływu nie można. Porównanie wartości średnich pozwoli nam w większości przypadków odpowiedzieć na postawione pytanie. Wiemy już jak postępować w przypadku naszego doświadczenia. Możemy jednak rozszerzyć znacznie program badań. Oto garść dodatkowych pytań:

— czy rozmiary kropli zależą od grubości zakończenia drewienka, z którego kapią?
— czy rozmiary kropli zależą od temperatury cieczy? Sprawdźcie korzystając z oleju jadalnego ochłodzonego w lodówce i podgrzanego.
— czy dodatek mydła do wody zwiększa czy też zmniejsza rozmiary kropli?

Na zakończenie proponuję zbadanie wpływu czynników przypadkowych. Powtórzcie doświadczenie z jedną cieczą 50 razy. Można w tym celu wybrać naczynie bardzo małe (ale nie za małe, bo wprowadzimy duże błędy systematyczne), aby wkraplanie nie było zbyt nużące. Wykreślcie wyniki pomiarów na papierze kratkowanym tak jak na rysunku i zaznaczcie strzałką, w którym miejscu znajduje się wartość średnia. Czy wynik pozwala zrozumieć, dlaczego liczyliśmy w naszych doświadczeniach wartość średnią?



x — jeden pomiar

Małą „Deltę" opracowali: Tomasz Hofmokl i Przemysław Nowicki.