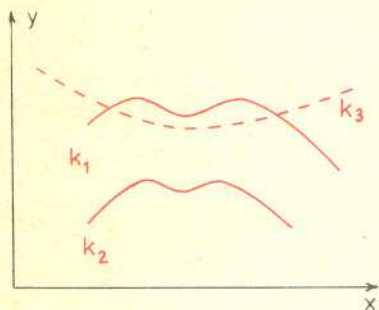


1. Ilościowo a jakościowo

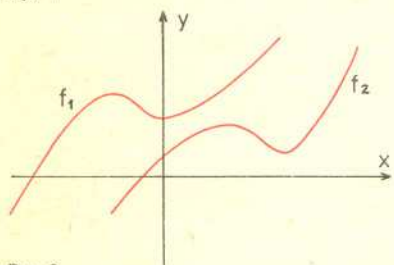
Przyjęło się powszechnie, że tylko wtedy dana dziedzina wiedzy jest ścisła, gdy dostarcza ona opisu ilościowego. W myśl utartych stereotypów ideałem wiedzy ścisłej jest fizyka, gdzie ciągle coś się mierzy, oblicza, zaś ukoronowaniem wyników badań jest formuła ilościowa, do której można podstawiać dane liczbowe. Można czasem usłyszeć jako podstawową zasadę fizyki: „fizyk może w odpowiedzialny sposób mówić tylko o rzeczach, które jest w stanie zmierzyć”. *Mierzenie* jest to przyporządkowywanie liczby układowi fizycznemu w określonym stanie. A zatem liczba miałaby stanowić ostateczną potrzebę ludzkiego intelektu?

Fizycy eksperymentatorzy w swojej ciężkiej pracy bardzo lubią posługiwać się wykresami. Jest naszą ludzką cechą, że posługując się wykresami jesteśmy znacznie operatywniejsi niż gdybyśmy posługiwali się wyłącznie danymi liczbowymi. Ale czy nie chodzi w tym przypadku o coś głębszego?

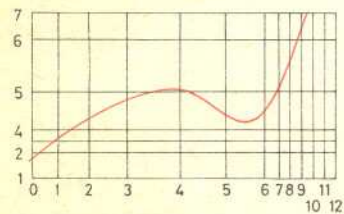
René Thom przedstawił następujący przykład. Wyobraźmy sobie eksperymentatora dokonującego pomiarów, który wyniki pomiarów przedstawił później za pomocą wykresów. Przypuśćmy, że w wyniku kolejnych eksperymentów uzyskał on krzywe k_1, k_2, k_3 takie, jak na rys. 1. Patrząc na wykresy będzie on skłonny uznać, że zjawisko scharakteryzowane krzywą k_1 ma wiele wspólnego ze zjawiskiem, któremu odpowiada k_2 , zaś zjawisko związane z k_3 ma raczej odmienny charakter. Podstawą takiej oceny jest podobieństwo formy krzywych k_1, k_2 , pomimo faktu, że k_1 ilościowo jest bardziej zbliżone do k_3 aniżeli do k_2 . Okazuje się, że życie bardzo często przyznaje rację takiej intuicji, opartej na podobieństwie formy.



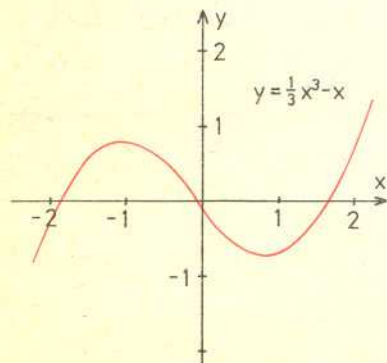
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

2. Forma funkcji w matematyce

Uchwycenie powyższej intuicji „formy” bardzo często jest celem poczynań matematyków. Kogokolwiek uczono analizy matematycznej, ten nieraz miał do czynienia z zadaniem: zbadać przebieg funkcji. W takim zadaniu chodzi o ustalenie przedziałów, w których funkcja maleje, w których rośnie, czy występują maksima lokalne, minima, punkty przegięcia etc. Przypatrzmy się teraz dwom funkcjom, do których stosuje się następujący opis słowny: najpierw funkcja monotonicznie rośnie (w pewnym przedziale od $-\infty$), osiąga maksimum lokalne, maleje monotonicznie w skończonym przedziale, osiąga minimum lokalne, ponownie rośnie monotonicznie (do $+\infty$). Na rysunku 2 podaliśmy wykresy dwu funkcji, do których stosuje się powyższy opis. Oceniając wizualnie te wykresy stwierdzamy, że forma ich ma „coś wspólnego”. Będziemy dążyć do matematycznego sprecyzowania istoty tego ich podobieństwa.

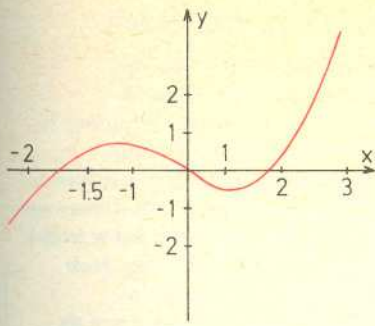
Rysunek 3 przedstawia pewien sposób zdeformowania płaszczyzny wykresu, przy którym wykres f_1 przejdzie na wykres f_2 .

Przedstawioną deformację przeprowadzamy w ten sposób, by linie równoległe do osi y -ów po deformacji również pozostały liniami prostymi równoległymi do tej osi, podobnie jest z liniami równoległymi do osi x -ów. Linie opatrzone poszczególnymi numerkami na górnym wykresie przechodzą na linie o tych samych numerkach na dolnym wykresie. Powyższe ponumerowanie możemy zinterpretować jako pewien sposób „wycechowania” osi x -ów i y -ów (w takim sensie, w jakim są wycechowane skale fizycznych przyrządów pomiarowych). Dzięki takiemu wyskalowaniu osi x -ów i y -ów nasze wykresy można zinterpretować jako graficzne przedstawienie pewnej funkcji rzeczywistej (która liczbom przyporządkowuje liczby). Zauważmy teraz, że przy tak przyjętych wyskalowaniach osi współrzędnych wykresy na rys. 3 są wykresami tej samej funkcji. Sposób wyskalowania osi na górnym wykresie będziemy skłonni uznać za „naturalny” — kolejnym liczbom całkowitym odpowiadają punkty w równych odstępach. Czy musimy zawsze trzymać się tej zasady? Jeżeli ktokolwiek z Czytelników miał kiedyś okazję oglądać przyrząd zwany higrometrem włosowym, ten mógł się przekonać, że używane są podziałki, gdzie kreski odpowiadające liczbom o jednakowych różnicach nie są rozmieszczone równomiernie. Jednostki wilgotności używane przez fizyków są adekwatniejsze, aniżeli jednostki wynikię z równomiernego wyskalowania podziałki higrometru włosowego.

3. Pojęcie typu funkcji

Odstąpienie od zasady równomiernego skalowania osi x -ów i y -ów może przynieść istotne korzyści również z punktu widzenia rozważań czysto matematycznych.

Przyjrzyjmy się najpierw (rys. 4) wykresowi funkcji $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ w „normalnie” wyskalowanych osiach x, y ; widzimy, że wykres ten ma tę samą „formę”, co rozważane poprzednio wykresy na rys. 1, i można go w opisany wyżej sposób zdeformować do któregośkolwiek z wykresów f_1, f_2 , — zatem po odpowiednim doborze skal wykresy te mogą być wykresami funkcji $y = \frac{1}{3}x^3 - x$.



Rys. 5

Dzięki swobodzie doboru skali mając dany wykres możemy interpretować go jako graficzne przedstawienie funkcji o bardzo prostym zapisie, a więc bardzo wygodnej w operowaniu nią. Rysunek 5 przedstawia wyskalowanie osi współrzędnych, przy którym wykres f_2 z rys. 2 jest wykresem funkcji $y = \frac{1}{3}x^3 - x$. Uzyskujemy je następująco: niech a oznacza punkt stanowiący lokalne maksimum wykresu f_2 , b jego minimum lokalne. Punktowi a musimy przyporządkować zatem $y = \frac{2}{3}$, zaś punktowi b wartość $y = -\frac{2}{3}$ (takie są wartości funkcji $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ w jej maksimum lokalnym i minimum lokalnym). Pozostałe wartości y dobieramy tak, by uzyskać zwykłą skalę „równomierną” (w przypadku wykresu tego typu, co f , jest to dopuszczalne). Wówczas wartości na osi x -ów są jednoznacznie określone przez warunek, że danej wartości y odpowiada x spełniające $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ (funkcja $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ jest wzajemnie jednoznaczna w przedziałach: od $-\infty$ do -1 , od -1 do $+1$ oraz od 1 do $+\infty$). W analogiczny sposób nasz wykres f_2 może odpowiadać funkcji $y = x^5 - x$ albo funkcji $y = x^7 - \sin x$, albo..., ale nie moglibyśmy posłużyć się np. funkcją $y = x$. Zanim przystąpimy do wykazania tego ostatniego, zauważmy, że to co określiliśmy jako „wyskalowanie osi” można zdefiniować jako wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie tej osi (czyli prostej euklidesowej) na zbiór liczb rzeczywistych; przekształcenie takie przyporządkowuje każdemu punktowi osi pewną liczbę rzeczywistą. Przypuśćmy teraz, że istnieje możliwość takiego wyskalowania osi układu współrzędnych dla funkcji $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ oraz takiego wyskalowania osi dla funkcji $y = x$, że przy tych wyskalowaniach obu funkcjom odpowiada ten sam wykres. Niech h_1 i g_1 będą takimi wyskalowaniami odpowiednio osi x -ów i osi y -ów dla funkcji $y = \frac{1}{3}x^3 - x$, a h_2 i g_2 — dla funkcji $y = x$. Oznaczmy przez h złożenie $h_2 \circ h_1^{-1}$, niech $g = g_1^{-1} \circ g_2$. Odwzorowania te przyporządkowują liczbom liczby i są wzajemnie jednoznaczne (ponieważ z założenia h_1, h_2, g_1, g_2 są wzajemnie jednoznaczne). Założenie, że przy przyjętych wyskalowaniach obie nasze funkcje mają ten sam wykres oznacza teraz, że

$$\text{dla każdego } x: \frac{1}{3}x^3 - x = g \circ h(x).$$

Jest to jednak niemożliwe, ponieważ po prawej stronie mielibyśmy funkcję wzajemnie jednoznaczną, zaś funkcja $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ taką nie jest. Możemy powiedzieć, że funkcje $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ oraz $y = x$ mają różny typ, ich wykresy mają różną „formę”. Sprezycujemy to w następującej definicji:

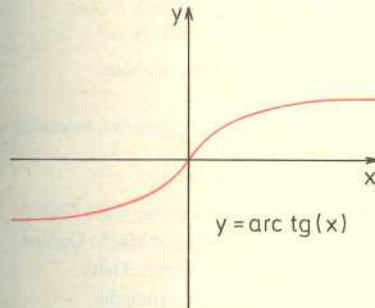
Definicja. Mówimy, że dwie różniczkowalne funkcje rzeczywiste f_1, f_2 mają ten sam typ (typologiczno-różniczkowy), jeśli istnieją dwie funkcje h, g odwzorowujące wzajemnie jednoznacznie zbiór liczb rzeczywistych na cały zbiór liczb rzeczywistych, spełniające równość:

$$f_1 = g \circ f_2 \circ h, \quad \text{tzn. dla każdego } x \quad f_1(x) = g(f_2(h(x))).$$

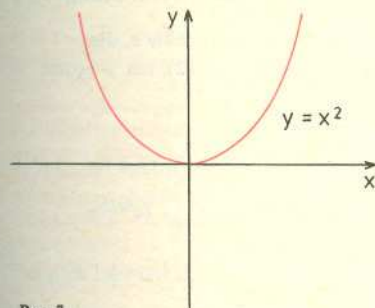
Zakładamy przy tym, że każda z funkcji h, g ma ciągłą pochodną, i że tę samą własność mają funkcje odwrotne do nich. Funkcje h, g (ogólniej — odwzorowania) spełniające warunki podane w powyższej definicji matematycy nazywają *diffeomorfizmami*.

Warunki, jakie nałożyliśmy na h i g w powyższej definicji wyrażają żądanie, by dopuszczać tylko takie sposoby wyskalowania osi x, y , przy których wykres funkcji wszędzie różniczkowalnej będzie wszędzie gładki, bez ostrych załamań, a także by funkcja o tym samym typie co funkcja różniczkowalna również była różniczkowalna.

Na rysunkach 6—9 mamy przykłady funkcji mających różne typy.



Rys. 6

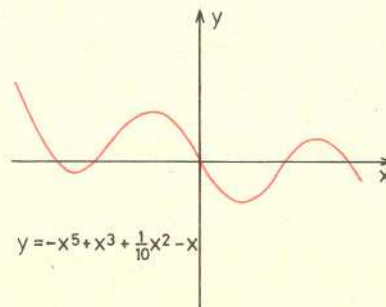


Rys. 7

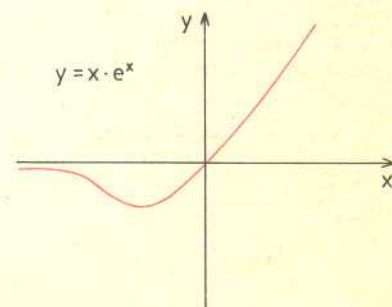
*Profesor A. Trautman wielokrotnie wyrażał ubolewanie nad maszkarnością tego potworka językowego, którego pierwszy człon (diffeo-) został wzięty z łaciny, zaś drugi (-morfizm) z greki.

Podobne ubolewanie wyrażał profesor R. Sikorski z powodu traktowania przedrostka diffeo — jako łacińskiego, gdyż Rzymianie nie znali takiego zwrotu — pisali natomiast differo-.

Na marginesie dodam, że jeszcze prężniejszą brzmi „wiązka kostyczna”, gdzie zlepiono łaciński przedrostek „co” ze „styczna”.

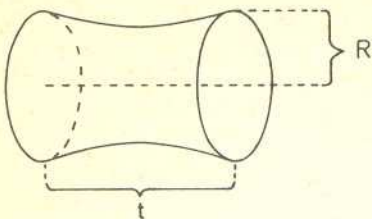


Rys. 8

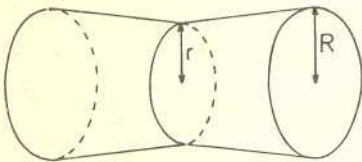


Rys. 9

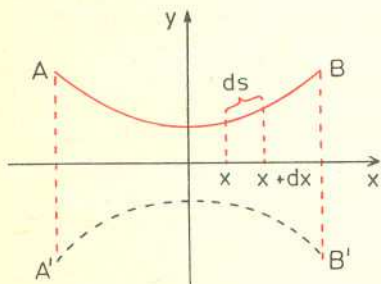
4. O rozpinaniu błony mydlanej na dwóch pierścieniach



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Opiszemy teraz przykład pewnego zjawiska fizycznego, dla którego istotną rolę w jego wyjaśnieniu odgrywa właśnie wprowadzone wyżej pojęcie typu topologicznego funkcji. Niech będą dane dwa identyczne pierścienie z cienkiego drutu w kształcie okręgu. Ustawmy je równoległe do siebie, tak by linia łącząca ich środki była prostopadła do ich płaszczyzn (rysunek 10). Jeżeli w takiej pozycji zbliżymy je dostatecznie do siebie i zanurzymy w roztworze mydła, to po wyjęciu uzyskamy błonkę z tego roztworu, łączącą pierścienie (rys. 10). Obserwując kształt tej błonki stwierdzamy, że nie stanowi ona powierzchni bocznej walca, lecz jest w środku przewężona. Wynika to z fizycznej zasady minimalizacji pola powierzchni błony (por. *Mala Delta* 7/1976), bowiem powierzchnia boczna walca spośród powierzchni rozpiętych na powyższych pierścieniach wcale nie ma najmniejszego pola. Bardzo łatwo możemy o tym się przekonać obliczając powierzchnię boczną dwóch stożków ściętych, takich jak na rys. 11 (pod warunkiem, że r nie będzie zanedba różniło się od R). Metod rozwiązania problemu powierzchni o minimalnym polu dostarcza dziedzina zwana rachunkiem wariacyjnym. Sprowadza ona tego typu problemy „minimalizacji” do problemu rozwiązania pewnych równań różniczkowych, tzw. równań Eulera-Lagrange’a. Bliższa analiza pokazuje, że powierzchnia o minimalnym polu musi być powierzchnią obrotową, powstającą przez obrót pewnej krzywej płaskiej łączącej pierścienie wokół osi łączącej środki pierścieni.

Wybermy zatem jedną płaszczyznę przechodzącą przez oś układu. Problem sprowadziliśmy do znalezienia właściwej krzywej łączącej dwa punkty pierścieni (patrz rys. 12). Wprowadzamy w płaszczyźnie przekroju współrzędne (x, y) tak, by oś x przechodziła przez środki pierścieni, a oś y leżała w równej odległości od nich. Punkty A, A', B, B' są punktami przekroju naszych pierścieni z r o z w a ż a n ą płaszczyzną. Wykres poszukiwanej funkcji musi przechodzić przez punkty A, B . Otóż wykazemy teraz, że z punktu widzenia rachunku wariacyjnego nasz problem znalezienia krzywej przekroju jest tożsamy z problemem znalezienia kształtu swobodnie wiszącego jednorodnego łańcucha. Z podstawowych zasad mechaniki wiemy, że taki łańcuch znajdzie się w położeniu równowagi tylko wtedy, gdy jego energia potencjalna osiągnie minimalną wartość.

Rozpatrzmy „element” łańcucha o długości $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$. Jego energia potencjalna jest równa $d m \cdot g \cdot y = g \cdot \rho \cdot y \cdot ds = g \cdot \rho \cdot y \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$, gdzie ρ oznacza masę łańcucha na jednostkę jego długości. Z kolei rozpatrzmy fragment naszej powierzchni obrotowej zawarty między płaszczyznami prostopadłymi do osi x -ów i przecinającymi tę oś w punktach x oraz $x + dx$. Pole powierzchni takiego fragmentu jest równe iloczynowi jego szerokości $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ przez jego długość $2\pi y$. Zatem w obydwu przypadkach mamy problem

zminimalizowania funkcjonału postaci $C \int_{-l/2}^{l/2} y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$, gdzie C w przypadku łańcucha

równe jest $g\rho$, w przypadku naszej błony $C = 2\pi$. Funkcjonały różniące się o stały współczynnik osiągają swe minimalne wartości na tych samych funkcjach; podobnie dwie funkcje różniące się o stały współczynnik dodatni osiągają swe minima w tych samych punktach. Ogólne rozwiązanie problemu krzywej łańcuchowej podał dr W. Kufel w siódmym numerze *Delty* z lipca ub. roku poprzez bezpośrednią analizę warunków równowagi wiszącego łańcucha.

W wyniku uzyskał on następujący wzór: $y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$. Funkcja takiej postaci będzie stanowiła rozwiązanie i naszego problemu, jeżeli tylko będzie się dało dobrać takie a , dla którego wykres powyższej funkcji będzie przechodził przez punkty A, B (rys. 12), tzn. a będzie

$$\text{spełniało równanie } R = \frac{a}{2} (e^{t/2a} + e^{-t/2a}).$$

Dokonyamy teraz pewnego manewru, mianowicie powyższe równanie względem a (jest to równanie niealgebraiczne) przepiszemy w postaci układu dwóch równań: $R = \frac{u}{2} (e^{bt/2} +$

$$+ e^{-bt/2}), u = \frac{1}{b},$$

gdzie niewiadomymi są u, b . Zauważmy teraz, że dla danych wartości R, t, u

równanie $R = \frac{u}{2} (e^{bt/2} + e^{-bt/2})$ (przy czym $0 < u < R$, zaś $R, t > 0$) ma dokładnie jedno rozwiązanie ze względu na b (sprawdzenie tego polecam jako ćwiczenie dla Czytelnika, należy posłużyć się pomocniczą zmienną $s = e^{bt/2}$ i zauważyć, że $\frac{1}{s} = e^{-bt/2}$ przy założeniu $b > 0$).

Oznaczmy przez b_u tak znaną wartość b odpowiadającą danemu u . Zatem każdej wartości u odpowiada jednoznacznie funkcja postaci

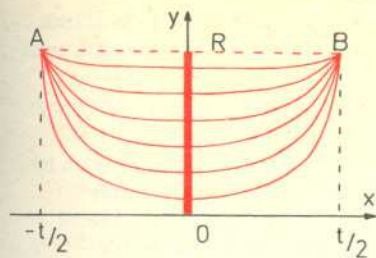
$$y = \frac{u}{2} (e^{b_u x/2} + e^{-b_u x/2}).$$

Ostatecznie pozostaje nam więc ustalenie właściwej wartości u , tj. tej, przy której nasza powierzchnia obrotowa osiągnęłaby minimalną wartość swego pola (o ile taka istnieje).

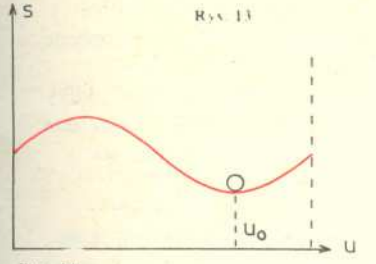
Pomimo identycznej postaci funkcjonału do zminimalizowania opisane problemy wariacyjne są jednak różne. Wiszący łańcuch bowiem osiąga minimum energii potencjalnej dla wszystkich jego położen przy ustalonej jego długości, jest to przykład tzw. minimum warunkowego. Zatem klasa funkcji dopuszczalnych tu do konkurencji jest węższa i dlatego zbiór rozwiązań będzie szerszy. Można to zilustrować na przykładzie funkcji $y = x^2 - y^2$, która na płaszczyźnie zmiennych x, y nie ma minimów, zaś po obcięciu jej do osi x -ów ($y = 0$) punkt $(0, 0)$ staje się miejscem minimum funkcji obciętej. Rozważania W. Kufela doprowadziły do wniosku, że wszystkie możliwe krzywe łańcuchowe są postaci

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right) + C_2,$$

(Dokonał on szczególnego wyboru stałych C_1, C_2 .) Oznacza to, że spośród funkcji takiej postaci możemy poszukiwać rozwiązania naszego problemu. Okazuje się, że w naszym przypadku musimy przyjąć $C_2 = 0$ (i nie jest to kwestia swobodnego wyboru). Natomiast wybór $C_1 = 0$ wiąże się w naszym przypadku ze szczególnym układem współrzędnych.



Rys. 13



Rys. 14

Zauważmy, że u możemy interpretować jako wartość zmiennej y , którą przyjmuje odpowiadająca jej funkcja w punkcie $x = 0$. Mamy więc do czynienia z rodziną funkcji „numerowaną” punktami na osi y -ów z przedziału $0 < y < R$ (rysunek 13). Wartości granicznej $y = R$ odpowiada sytuacja, w której nasza powierzchnia degeneruje się do powierzchni bocznej walca. Przy u zbliżającym się do zera nasza powierzchnia coraz bardziej upodabnia się do dwóch membran wypełniających wnętrza pierścieni i połączonych osiowo cienką rurką, której grubość maleje do zera. Dla $u = 0$ nasza powierzchnia degeneruje się więc do dwóch oddzielnych membran, wypełniających wnętrza pierścieni.

Każdej wartości u zatem jednoznacznie odpowiada krzywa wyznaczająca powierzchnię obrotową, której wartość pola powierzchni zapiszemy $S(u)$. Mamy zatem funkcję $S = S(u)$, która jest ciągła i różniczkowalna. Funkcja ta ma wartości graniczne: $2\pi R^2$ dla $u \rightarrow 0$ oraz $2\pi Rt$ dla $u \rightarrow R$ (dlaczego?). Wartość u_0 odpowiadająca minimum tej funkcji (rys. 14) jest „numerkiem” powierzchni z naszej rodziny, która będzie zrealizowana przez fizycznie istniejącą błonę mydlaną. Gdybyśmy wykres funkcji $S = S(u)$ wykonali tak, by mogła po nim toczyć się kulka (zakładając, że pion wyznacza oś S), wówczas wartości u_0 odpowiada położenie stabilnej równowagi kulki, jak to symbolicznie zaznaczyliśmy na rysunku. Funkcja $S(u)$ zależy oczywiście od odległości między pierścieniami. Dlatego przy zmieniającej się odległości t będziemy mieli rodzinę funkcji $S_t(u)$, parametryzowaną przez t .

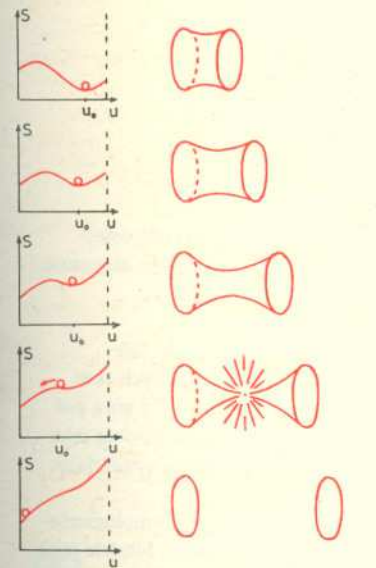
5. O „katastrofalnym” pęknięciu błony mydlanej

Prześledzimy teraz, jak będzie zmieniać się funkcja $S_t(u)$ przy systematycznie rosnącym t poczynając od wartości bliskiej zeru. Ewolucję tę będziemy systematycznie konfrontować z fizyczną sytuacją błony rozpiętej na pierścieniach. Na rysunku 15 mamy „historyjkę obrazkową”, którą będziemy przeglądać od góry do dołu. Z prawej strony mamy układ fizyczny, z lewej — odpowiadającą mu funkcję $S_t(u)$. W początkowej sytuacji, gdy $t < R$, prawy koniec wykresu $S_t(u)$ znajduje się niżej niż lewy, bowiem wówczas $2\pi Rt < 2\pi R^2$, wartość odpowiadająca u_0 stanowi minimum absolutne $S_t(u)$. Przy wzroście t podnosi się prawy koniec wykresu, podnosi się i przemieszcza w lewo jego minimum w u_0 , co objawia się w mocniejszym przewężeniu błony na środku jej długości. Dochodzi do tego, że minimum lokalne w u_0 przestaje być minimum absolutnym funkcji $S_t(u)$, jednak w dalszym ciągu jest ono fizycznie realizowane przez błonę mydlaną, bowiem przejście do innych u musiałoby odbywać się wbrew działaniu sił napięcia powierzchniowego. Tak samo kulka znajdująca się w u_0 nie może tego miejsca opuścić, dopóki jest tam minimum lokalne, nie może bowiem toczyć się pod górę. Wreszcie przy odpowiednio dużym t wykres funkcji $S_t(u)$ „wyprostowuje się” do tego stopnia, że minimum lokalne w u_0 przestaje istnieć: nasza kulka zaczyna gwałtownie się staczać dążąc do $u = 0$. Odpowiada temu przejście katastrofalne w naszym układzie fizycznym: w pewnym momencie błona zaczyna gwałtownie się zwaćzać w swej środkowej części, aż dochodzi do przerwania jej ciągłości, w wyniku czego przybiera ona postać dwóch membran wypełniających wnętrza pierścieni. Przy dalszym wzroście t funkcja $S_t(u)$ staje się coraz szybciej rosnącą funkcją monotoniczną, zaś w układzie fizycznym panuje sytuacja zdegenerowana, odpowiadająca kresowi dolnemu wartości $S_t(u)$ na odcinku $0 < u < R$.

Moment katastrofalnego przejścia, które drastycznie zmieniło sytuację w rozważanym układzie fizycznym jest dokładnie tym momentem, w którym funkcja $S_t(u)$ zmieniła swój typ topologiczny. Do momentu krytycznego funkcja $S_t(u)$ miała typ topologiczny funkcji $y = u^3 - u$, natomiast po jego przekroczeniu ma ona typ funkcji ściśle monotonicznie rosnącej, reprezentowanej przez $y = u$. Gdybyśmy dla każdej wartości t odpowiednio dobrali sposób numerowania alternatywnych powierzchni parametrem u , wówczas wyrażenie $S_t(u)$ przybrałoby następującą, „kanoniczną” postać: $S_t(u) = u^3 + (t - t_0)u$. Z punktu widzenia „katastrof elementarnych” Thoma w opisanym przykładzie mieliśmy do czynienia z przejściem katastrofalnym „faldy”, jest ono najprostsze spośród elementarnych katastrof. W przyszłości opowiemy o nich bardziej szczegółowo.

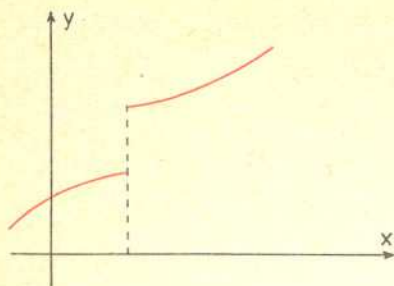
6. Konkluzja

Opisany wyżej przykład stanowi ilustrację, w jaki sposób można pogodzić dwie pozornie przeciwstawne zasady filozoficzne: z jednej strony mamy tzw. zasadę Leibniza, mówi ona, że jeżeli jakieś parametry ilościowe układu fizycznego są zależne, to zależność ta jest ciągła (o ile oczywiście parametry te określimy w dostatecznie naturalny sposób). Zasada Leibniza odegrała ogromną rolę w fizyce, zwłaszcza w mechanice kwantowej korzysta się z niej w sposób jawny („warunki zszycia”). Z drugiej strony filozofowie dialektycy głoszą, iż „przejścia skokowe są prawidłowością rozwoju”, jako przykład podają oni proces ogrzewania wody, który w pewnym momencie doprowadza do gwałtownego przejścia w stan lotny. Przyjrzyjmy się, co się dzieje w kryształach ciała stałego, systematycznie podgrzewanym. Zmieniają się w nich parametry takie jak: prędkości poszczególnych molekuł, ich położenia, średnia prędkość molekuly etc. Wszystkie te wielkości zmieniają się w sposób ciągły. Każda molekula porusza się w rejonie swego węzła sieci Bravais. W miarę wzrostu temperatury molekuly poruszają się coraz szybciej i coraz większy obszar jest penetrowany przez poszczególne molekuly.



Rys. 15

René Thom (ur. 1923), najwybitniejsza indywidualność matematyczna drugiej połowy XX w. Swoimi wynikami wywarł ogromny wpływ na oblicze matematyki współczesnej; położył podwaliny bardzo obszernego obecnie działu topologii różniczkowej — teorii kobordyzmów (ok. 1954 r.), za co dostał w 1958 r. medal Fieldsa. Swoim twierdzeniem o transwersalności (ok. 1956) przyczynił się do zapoczątkowania teorii osobliwości jako samodzielnej dziedziny o silnych, specyficznych dla niej metodach. Swoim przypuszczeniem o prawdziwości twierdzenia przygotowawczego Weierstrassa dla funkcji rzeczywistych klasy C^∞ przyczynił się do powstania nowej dziedziny zwanej analizą różniczkową. W ogromnym stopniu wpłynął on na ukształtowanie oblicza tzw. teorii gładkich układów dynamicznych (tw. o nieistnieniu globalnych całek pierwszych). Jego najgłośniejszym osiągnięciem jest wycieczony przezeń program matematycznej teorii morfogenezy, zwanej potocznie „teorią katastrof”. Wniósł wiele interesujących myśli do filozofii matematyki.



Dochodzi do momentu, kiedy pojęcie sieci Bravais dla scharakteryzowania ruchu molekuł traci sens: molekuly uzyskują swobodę poruszania się po całym rejonie wypełnianym pierwotnie przez kryształ. Mówimy wówczas, że kryształ uległ stopieniu. Widzimy więc, że ta skokowa przemiana, jaką jest topnienie, polega na zmianie charakterystyk topologicznych ruchu poszczególnych molekuł, ilościowych skoków tu nie ma.

Celem sprostowania nieporozumień, jakie narosły wokół teorii Thoma, podkreślam: w teorii tej nie ma miejsca na nieciągłości takie, jak na rysunku obok. W grę wchodzi tam wyłącznie nieciągłości własności jakościowych. Zwróćmy uwagę, że wyrażenie $u^3 + tu$, w którym obecna jest nieciągłość polegająca na skokowej przemianie typów topologicznych, pod względem zależności od parametrów u, t jest wzorowym przykładem „porządnej” funkcji w sensie jej „zwykłej” ciągłości, różniczkowalności etc. Tylko takimi funkcjami i odwzorowaniami operuje teoria Thoma.

Z opisanego wyżej przykładu wynika jeszcze inny morał. Można wyobrazić sobie fizyka, który będzie starał się wyjaśnić opisane zjawisko wysuwając hipotezy o zmieniającym się charakterze sił napięcia powierzchniowego przy malejącej grubości błony, można sobie wyobrazić, jak będzie on budował coraz bardziej skomplikowane modele na poziomie molekularnym. Otóż Thom wskazuje, że być może taki właśnie błąd popełniają współcześni biologowie urzeczni postęпами biochemii i biologii molekularnej, którzy podświadomie uwierzyli, że na molekularnym poziomie znajdują wyjaśnienie „tajemnicy życia”. Wiele wskazuje na to, że szereg zjawisk fizjologicznych znajdzie swoje wyjaśnienie w globalnych własnościach żywego organizmu, nawet bez potrzeby odwoływania się do poziomu komórkowego, tak jak opisane przez nas zjawisko znajduje wyjaśnienie w globalnej geometrii układu.

Kosmologia geometryczna, czyli ewoluująca geometria

Dr hab. Bronisław KUCHOWICZ

Gdybym miał wymienić jedną tylko, ale za to najbardziej fundamentalną (moim zdaniem) właściwość Wszechświata, nie miałbym wątpliwości i bez wahania wymieniałbym jego ekspansję. Czyż nie jest bowiem czymś niezwykle uderzającym owo nieustanne rozszerzanie się Wszechświata?

Jest to fakt. Nauka jednak — to nie tylko zbiór faktów. Niezbędna jest choć próba ich wyjaśnienia, powiązania ze sobą. Dziś u podstaw wyjaśnienia faktów kosmologicznych tkwi ogólna teoria względności Einsteina — współczesna teoria czasoprzestrzeni. Już od z górą pół wieku trwają próby zastosowania tej skądinąd niezwykle owocnej teorii do Wszechświata jako całości. Próby takie podejmował sam Einstein, podejmowali (i podejmują do dziś, uogólniając teorię) inni, tworząc modele Wszechświata.

Wspominaliśmy już w pierwszym artykule z cyklu kosmologicznego, że modele kosmologiczne są to konstrukcje teoretyczne opisujące zachowanie się Wszechświata jako całości. Modele takie dopasowuje się do istniejących danych obserwacyjnych. Uznanie takich faktów, jak np. ekspansja kosmiczna albo obecność promieniowania szcztątkowego (o których była mowa w numerach Delt 8/1976 i 10/1976), prowadzi do odrzucenia tych modeli, które nie przewidują ekspansji ani promieniowania tła. Tak więc odrzucono został pierwszy spośród modeli kosmologicznych opartych o ogólną teorię względności, zaproponowany przez samego Einsteina w 1917 roku model statycznego Wszechświata. Było to jeszcze na długo przed ogłoszeniem przez Hubble'a wyników jego badań nad odległymi galaktykami, przed stwierdzeniem ich powszechnej ucieczki. Wydawało się wtedy rzeczą naturalną przyjąć, że Wszechświat jako całość musi być niezmienny w czasie, statyczny. Mogą wprawdzie powstawać gwiazdy i układy planetarne (wystarczy wspomnieć o starej teorii Kanta-Laplace'a), zmieniać się mogą drobiazi, ale porządek kosmiczny pozostaje trwały. Dlaczego bowiem miałyby się zmieniać? W latach 1922–1924, kiedy koncepcja statycznego, niezmiennego Wszechświata wydawała się czymś naturalnym, pojawiły się dwie prace młodego, nieznanego ani Einsteinowi, ani innym fizykom zachodnim matematyka z Leningradu, A. A. Friedmanna. Już w pierwszej z nich, zatytułowanej „O krzywiznie przestrzeni”, udało mu się uzyskać nieoczekiwany wynik, przeczny z całą nagromadzoną do tej pory wiedzą. Geometria Wszechświata (patrz artykuł Einsteina, Delta 2/1977) zmieniać się miała nieustannie z upływem czasu, zakrzywienie przestrzeni i gęstość materii stale miały maleć lub rosnać, to samo odnosiłoby się do odległości wzajemnej dwóch punktów. Otrzymany przez Friedmanna model Wszechświata był modelem ewoluującym i stanowił wynik rozwiązania układu równań ogólnej teorii względności. Rozwiązania takiego nie znalazł poprzednio Einstein. Nic więc dziwnego, że po przeczytaniu pracy Friedmanna posłał do redakcji list z uwagami krytycznymi, wskazującymi na to, że model Friedmanna wzbudza poważne wątpliwości i że praca najprawdopodobniej jest błędna. List ten redakcja wydrukowała.

Aleksander Aleksandrowicz Friedmann, ur. 17 VI 1888, zm. 15 IX 1925, w 1909 ukończył studia na uniwersytecie w Petersburgu (sekcja matematyki), gdzie najbardziej interesowała go meteorologia dynamiczna. Po studiach pracował jako matematyk w Instytucie Dróg i Mostów, Instytucie Górnictwa; po wybuchu Pierwszej Wojny Światowej zgłosił się jako ochotnik na front, gdzie służył w lotnictwie, wykorzystując wolny czas na pisanie rozpraw naukowych. Oto co pisał w liście z frontu: „Zajmuję się obecnie zagadnieniem wyznaczenia temperatury i ciśnienia, gdy dane są prędkości... Potem przystąpię do napisania, jeśli uznacie to za właściwe, dla „Geograficznego Sbornika” niewielkiej notki o przyczynach powstawania i znikania turbulencji w atmosferze, choćby w najogólniejszej postaci matematycznej”. Nie ma w tym nic dziwnego, jeśli wziąć pod uwagę, że pierwszą w swym życiu pracę naukową (poświęconą liczbom Bernoulliego) posłał Friedmann do druku w poważnym czasopiśmie (wśród którego redaktorów byli ludzie tej klasy, co Klein i Hilbert) jeszcze jako uczeń ostatniej klasy gimnazjalnej. Praca ta ukazała się w druku, gdy Friedmann ukończywszy gimnazjum ze złotym medalem wstępował na studia. Po zakończeniu Pierwszej Wojny Światowej, jeszcze w latach wojny domowej, prowadził wykłady hydrodynamiki i analizy tensorowej na uniwersytecie w Leningradzie, wydał książki „Doświadczenia z hydrodynamiki cieczy ściśliwych” oraz „Świat jako przestrzeń i czas” i prace kosmologiczne, o których wspominaliśmy w tekście, wreszcie kierował Głównym Laboratorium Geofizycznym w Leningradzie. Niestety, w pełni sił zachorował i zmarł na tyfus.