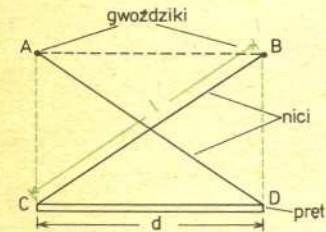
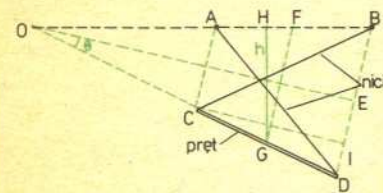


spontanicznego naruszenia symetrii

Fizycy mówiąc o teorii liniowej rozumieją przez to teorię opisującą dane zjawiska równaniami liniowymi.



Rys. 1. Schemat modelu. Gwoźdźdiki są umieszczone w punktach A i B. Końce pręta oznaczono literami C i D.



Rys. 2. Układ wychylony od poziomu o kąt 2θ .

Spełnione są następujące relacje:

$$AB = CD = 2AF = 2CG = d$$

$$AD = CB = l$$

$HG = h$ odległość środka ciężkości od poziomu gwoźdźdików

$$CI = y$$

$$GF = BI = x$$

$$\sphericalangle BOE = \sphericalangle EOD = \sphericalangle HGF = \sphericalangle DCI = \theta$$

$$\sphericalangle BEO = \sphericalangle CIB = \sphericalangle AHG = \sphericalangle 90^\circ$$

Z trójkąta BIC mamy

$$l^2 = x^2 + y^2$$

zaś z trójkąta CJD

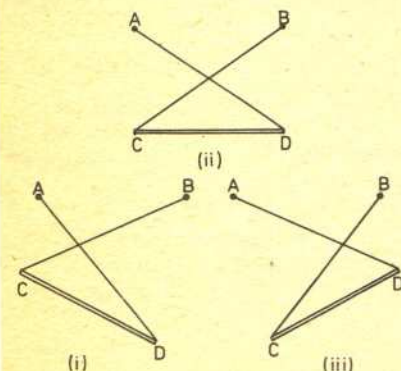
$$y = d \cos \theta$$

Na koniec z trójkąta HGF dostajemy

$$h = x \cos \theta$$

i ostatecznie mamy

$$h = \cos \theta \sqrt{l^2 - d^2 \cos^2 \theta}.$$



Rys. 3. Stany równowagi w przypadku (b): stany (i) i (iii) są trwałymi stanami niesymetrycznymi, stan (ii) jest symetrycznym stanem równowagi nietrwałej.

W wielu problemach fizyki istotną rolę odgrywają własności stanu równowagi układu. Stan taki, noszący w teoriach kwantowych nazwę stanu podstawowego, zaś w innych dziedzinach fizyki stanu stacjonarnego, jest zwykle wyznaczony przez ekstremalne wartości odpowiednich wielkości fizycznych (np. w mechanice minimum energii potencjalnej, a w termodynamice maksimum entropii). Jeśli rozważany układ fizyczny dopuszcza istnienie pewnych wewnętrznych symetrii (np. wahadło matematyczne dopuszcza symetrię względem odbicia zwierciadlanego), to wtedy, zgodnie z intuicją, stan równowagi powinien mieć maksymalną symetrię dopuszczalną dla układu. Jest to prawdziwe w teoriach liniowych a także, w wielu przypadkach, w teoriach nieliniowych.

Taką własność maksymalnej dopuszczalnej symetrii posiada na przykład stan równowagi termodynamicznej (stan ten jest przestrzennie jednorodny, ma więc symetrię translacyjną). Jednakże w pewnych układach nieliniowych trwałe stan równowagi może wykazywać brak takich podstawowych symetrii wtedy, gdy stan symetryczny jest stanem równowagi nietrwałej.

W obecnym artykule omówimy prosty układ mechaniczny, który w pewnych warunkach prowadzić będzie do niesymetrycznych stanów równowagi trwałej. Układ ten dobrze ilustruje mechanizm pojawiania się takich stanów, czyli mechanizm spontanicznego naruszenia symetrii. Słowo „spontaniczne” oznacza tu fakt, że brak symetrii stanu równowagi wywołany jest przez własności samego układu, a nie przez działanie czynników zewnętrznych.

Podstawowym elementem naszego modelu mechanicznego jest ciężki jednorodny pręt o stałym przekroju, długości d oraz masie M . Na pionowej powierzchni wbijemy dwa gwoźdźdiki w odległości d równej długości pręta. Gwoździe te należy wbić na tym samym poziomie. Zawiesimy nasz pręt na dwóch skrzyżowanych niciach o długości l , przymocowanych do końców pręta i przyczepionych do gwoździ. Otrzymany układ przedstawiony jest na rys. 1. Ważnym uzupełnieniem modelu jest warunek, by ruch odbywał się w płaszczyźnie pionowej. W ten sposób eliminujemy możliwość osiągnięcia stanu o najniższej dopuszczalnej przez długość nitek energii potencjalnej, stanu, w którym pręt wisi na niciach nie skrzyżowanych.

Szukać będziemy teraz możliwych stanów równowagi. Są one wyznaczone przez ekstrema energii potencjalnej. Energia potencjalna jest określona jedynie przez położenie środka ciężkości pręta. Wyraża się ona wzorem

$$V = -Mgh,$$

gdzie M oznacza masę pręta, g przyspieszenie ziemskie, zaś h odległość środka ciężkości pręta od poziomu gwoździ (patrz rys. 2).

Korzystając z wypisanych na marginesie relacji, można energię potencjalną przedstawić w postaci:

$$V = -Mg \cos \theta \sqrt{l^2 - d^2 \cos^2 \theta}.$$

W równości tej θ oznacza połowę kąta odchylenia pręta od poziomu. Układ opisywany jest przez jedną jedynie zmienną dynamiczną θ , jest więc układem o jednym stopniu swobody. Dla znalezienia stanów równowagi należy zbadać zmienność potencjału jako funkcji kąta θ , a w szczególności znaleźć jego ekstrema. Istotna w modelu jest nieliniowa zależność energii potencjalnej od $\cos \theta$.

Obliczymy pochodną funkcji V :

$$\frac{dV}{d\theta} = -Mg \frac{\sin \theta}{\sqrt{l^2 - d^2 \cos^2 \theta}} [l^2 - 2d^2 \cos^2 \theta].$$

Warunek znikania pochodnej prowadzi do dwóch równań:

$$(a) \quad \sin \theta = 0$$

lub

$$(b) \quad l^2 - 2d^2 \cos^2 \theta = 0.$$

Równanie (a) zawsze ma jedno rozwiązanie w interesującym nas zakresie kątów $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$, a mianowicie: $\theta = 0$.

Z równaniem (b) sprawa jest trochę bardziej złożona. Możemy przepisać je w postaci

$$\cos \theta = \frac{l}{d\sqrt{2}}.$$

Rozwiązania tego równania istnieją tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek: $l \leq \sqrt{2}d$.

Dla $l = \sqrt{2}d$ równanie przybiera postać $\cos \theta = 1$. Jego rozwiązanie, $\theta = 0$, jest identyczne z rozwiązaniem równania (a). Zwróćmy uwagę na fakt, że wartość graniczna $l = d\sqrt{2}$ odpowiada sytuacji, gdy prostokąt ABCD przedstawiony na rys. 1 jest kwadratem. W przypadku spełnienia ostrej nierówności $l < \sqrt{2}d$ równanie ma dwa rozwiązania postaci $\theta = \pm \arccos(l/d\sqrt{2})$. Po znalezieniu miejsc zerowania się pochodnej należy zbadać znak drugiej pochodnej w celu określenia typu ekstremalnego:

$$\frac{1}{Mg} \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\cos \theta [l^2 - 2d^2 \cos^2 \theta]}{\sqrt{l^2 - d^2 \cos^2 \theta}} + \frac{d^2 \sin^2 \theta \cos \theta [3l^2 - 2d^2 \cos^2 \theta]}{[l^2 - d^2 \cos^2 \theta]^{3/2}}.$$

Znajdujemy stąd, że dla $\theta = 0$

$$\frac{1}{Mg} \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{l^2 - 2d^2}{\sqrt{l^2 - d^2}},$$

a więc dla $l > d\sqrt{2}$ mamy minimum, zaś dla $l < d\sqrt{2}$ maksimum.

Natomiast dla $\cos\theta = l/d\sqrt{2}$ znajdujemy, że

$$\frac{1}{Mg} \frac{d^2V}{d\theta^2} = 4d \left(1 - \frac{l^2}{2d^2}\right) = 4d[1 - \cos^2\theta] = 4d \sin^2\theta > 0.$$

Wynika stąd, że jeśli istnieje rozwiązanie równania (b), to opisuje ono zawsze minimum. Powyższe wyniki można zebrać następująco. Należy rozważyć dwie sytuacje:

(A) $l \geq d\sqrt{2}$

oraz

(B) $l < d\sqrt{2}$.

W przypadku (A) istnieje tylko jedno minimum w punkcie $\theta = 0$. Punkt ten jest więc punktem równowagi trwałej. Odpowiadający mu stan równowagi ma maksymalną symetrię dozwoloną przez dynamikę układu. Rozwiązanie to jest w pełni zgodne z naszą fizyczną intuicją.

Natomiast sytuacja opisywana przez przypadek (B) jest diametralnie różna. Teraz potencjał ma trzy ekstrema: dwa minima i jedno maksimum. W punkcie $\theta = 0$ mamy teraz maksimum, a więc odpowiadający mu stan obdarzony maksymalną symetrią jest stanem równowagi nietrwałej.

Punktami $\theta = \pm \arccos(l/d\sqrt{2})$ odpowiadają minima, opisujące stany równowagi trwałej.

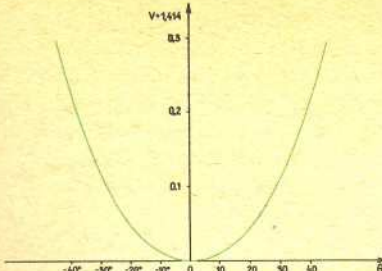
Widać od razu, że stany te mają uboższą symetrię niż stan dla $\theta = 0$. W pewnym jednak stopniu odbiciem symetrii wewnętrznej układu jest fakt, że jeden z tych dwóch stanów jest lustrzanym odbiciem drugiego. Na rysunku 3 przedstawiliśmy omawiane stany równowagi.

Dla lepszej ilustracji omawianej sytuacji podajemy na rysunkach wykres potencjału jako funkcji kąta θ w trzech omawianych przypadkach.

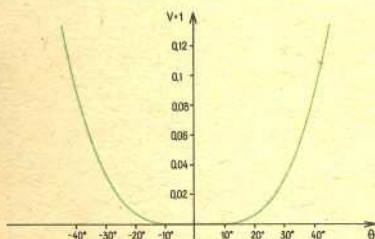
Przedstawiony na rys. 5 przypadek graniczny $l = d\sqrt{2}$ opisuje sytuację, gdy pochodna potencjału ma potrójny pierwiastek. Punkt ten nazywany jest punktem bifurkacji, ponieważ wychodzą z niego dwie gałęzie rozwiązań trwałych.

Chciałbym zachęcić Czytelnika do przeprowadzenia doświadczenia z omawianym tutaj układem dynamicznym. Będzie ono ciekawą ilustracją teoretycznych rozważań. Występujące dodatkowo tarcie pozwoli na sprawdzenie, że stan równowagi nietrwałej jest rzeczywiście stanem równowagi.

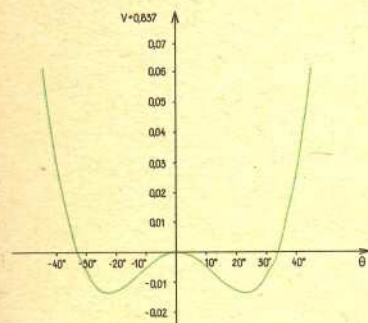
Na zakończenie chciałbym podkreślić jeszcze raz fakt pojawiania się stanów równowagi o symetrii uboższej niż maksymalna. Nic przecież w naszym modelu nie wyróżnia ani kątów dodatnich, ani ujemnych. A jednak istnieją stany równowagi trwałej wyróżniające odpowiednie znaki. Wynik ten jest związany ze zjawiskiem bifurkacji i może zachodzić jedynie w teoriach nieliniowych.



Rys. 4. Wykres potencjału ($V+1,414$) dla $l = \sqrt{3}d$.



Rys. 5. Wykres potencjału ($V+1$) dla $l = \sqrt{2}d$.



Rys. 6. Wykres potencjału ($V+0,837$) dla $l = \sqrt{1,7}d$.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 151. Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-1/\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie na str. 6

M 152. Za 10 gwoździ, 4 haki i 1 nakrętkę zapłacono 21 zł, za 7 gwoździ, 3 haki i 1 nakrętkę — 16 zł. Ile trzeba zapłacić za 1 gwoździe, 1 hak i 1 nakrętkę?

Rozwiązanie na str. 6

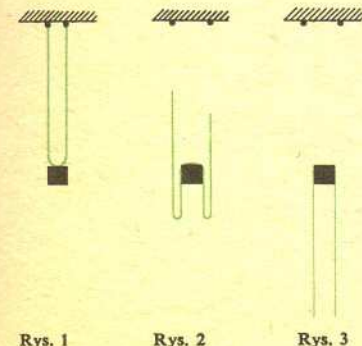
M 153. Dany wypukły kąt czwórcienny tak przeciąć płaszczyzną, by przekrojem był równoległobok.

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 51. Z dźwigu budowlanego urwała się cienka, wiotka, nierozciągliwa lina, która zwisając swobodnie dotykała środka nieruchomej belki podpartej na obu końcach (rys. 1). Lina spada tak, jak to pokazano na rysunkach 2 i 3. Masa liny na jednostkę długości wynosi ρ , a jej długość — $2l$. Wiadomo, że belka pęka, jeżeli nacisk na jej środek osiąga wartość N_0 . Jaki warunek muszą spełniać parametry ρ , l i N_0 , aby w czasie spadania liny belka nie pękła? Uwaga: Zakładamy, że każdy element liny po osiągnięciu właściwego mu położenia końcowego pozostaje nieruchomy.

Rozwiązanie na str. 7



Rys. 1

Rys. 2

Rys. 3