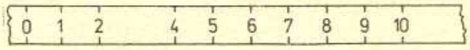
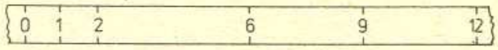
mała delta

Matematyczne problemy linijki

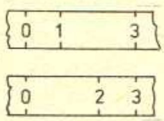
Spójrzmy na „wybrakowaną" linijkę na rysunku 1. Jej wada nie jest poważna, bo i tak możemy nią odmierzyć każdy odcinek od 1 do 10. Nie musimy przecież zaczynać mierzenia od punktu „0" linijki.

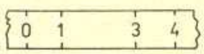
Rys. 1 

Linijka z rysunku 2 nadaje się do zmierzenia każdego z odcinków o długościach 1, 2, 3, ..., 11, 12 (np. 3 to odcinek między „6" a „9", 4 — między „2" a „6", a 5 — od „1" do „6" itd.).

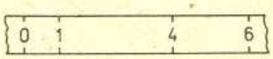
Rys. 2 

Rozumiemy, że linijka będzie dla nas przyrządem do odmierzania odległości (a nie przyrządem do rysowania linii prostych, jak w geometrii). Nazwijmy dobrą linijką (dokładniej: dobrą n-linijką) taką linijkę, która umożliwia (za pomocą jednego przyłożenia) odłożenie odcinka długości k (gdzie k jest dowolną liczbą naturalną nie przekraczającą n). Matematyk od razu postawi pytanie: jaka jest minimalna liczba kresek na dobrej n-linijce.
Tę minimalną liczbę kresek oznaczamy przez $k(n)$; to, że zależy ona od liczby n jest zrozumiałe.
Kilka początkowych wartości liczby $k(n)$ możemy łatwo obliczyć. Dla $n = 3$ mamy oczywiście $k(3) = 3$ (rysunek 3). Rysunek 4 pokazuje dobrą 4-linijkę i równie zrozumiałe jest, że nic więcej z 4-linijkami zrobić się nie da.

Rys. 3 

Rys. 4 

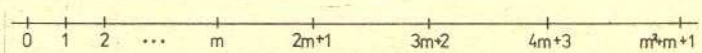
Oto dobra 6-linijka.

Rys. 5 

Widzieliśmy też dobrą 12-linijkę, zawierającą tylko 6 kresek. To znaczy, że $k(12) \leqslant 6$. Ale $k(12)$ nie może być równe 5 (ani mniej), bo używając 5 kresek możemy odmierzyć tylko $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ odcinków. Zatem $k(12) = 6$. Obliczenie innych wartości $k(n)$ przy małym n pozostawiamy już zainteresowanemu Czytelnikowi. My przytoczymy proste:

Twierdzenie $$\sqrt{2n} < k(n) < 2\sqrt{n}+1.$$

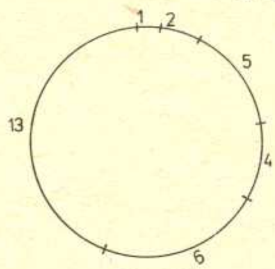
To łatwo udowodnić. Jeżeli mamy do dyspozycji $k(n)$ znaków, to możemy za ich pomocą zmierzyć tylko $\frac{k(n)\,(k(n)-1)}{2}$ odcinków, nigdy więcej. Po przekształceniach otrzymujemy pierwszą z nierówności powyższego wzoru. Równie prosta jest druga część, tj. uzasadnienie drugiej nierówności. Jeżeli m jest liczbą naturalną taką, że $m^2 < n < (m+1)^2$, to linijka pokazana na rysunku 6 jest dobrą n-linijką, chociaż nieekonomiczną.

Rys. 6 

Chociaż do tak prościusieńkiego z pozoru „problemu linijki” zaprzęgnięto tak poważne działy matematyki jak algebrę, teorię liczb, analizę matematyczną, kombinatorykę i geometrię rzutową, to nie udało się znaleźć wzoru wyobrażającego liczbę $k(n)$ w zależności od n. Udowodniono, że liczby $\frac{k(n)^2}{2}$ dążą do pewnej granicy, która jest większa od 2,434..., a mniejsza od 2,6666... Wykazano też, że dla $n > 6$ dobre n-linijki muszą zawsze być trochę nieekonomiczne, to znaczy, że pewne z odcinków można zmierzyć na kilka sposobów.

Ciekawe, że bardziej „ekonomiczne” z tego punktu widzenia są tak zwane linijki koliste. Możemy się przekonać, że każda z odległości $1, 2, \ldots, 29, 30$ może być (licząc po łuku) zmierzona przy pomocy „linijki” przedstawionej na rysunku 7, i to na jeden sposób. Na przykład 10 dostajemy jako $6+4$, 11 — jako $2+5+4$, 12 — jako $1+2+5+4$, 20 — jako $1+13+6$, 27 — to całe kółko bez 4 itd. Wykazano, że jeżeli q jest liczbą pierwszą, to okrąg o obwodzie q^2+q+1 można podzielić na takie $q+1$ odcinków (raczej: łuków), że otrzymaną kolistą linijką możemy zmierzyć każdy z odcinków o długościach $1, 2, \ldots, q^2+q+1$ w dokładnie jeden sposób. Czytelnik, jeśli zechce, bez dużego wysiłku narysuje kilka takich „linijek”.

Małą Deltę opracował MICHAŁ SZUREK



Rys. 7

Rozwiązanie zadania z majowej Radiodelty

Wielkościami dualnymi nazwijmy tu takie dwa wielościany, że jeden ma tyle wierzchołków, ile drugi — ścian i odwrotnie: tyle ścian, ile drugi — wierzchołków. Wielościany takie spotykamy i wśród wielościanów foremnych, np. sześcian i ośmiościan foremny.

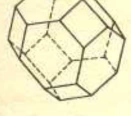
Zadanie. Każde naroże ośmiościanu foremnego ścięto płaszczyzną odcinającą $\frac{1}{3}$ każdej krawędzi wychodzącej z wierzchołka tego naroża.

a) Zbuduj model powstałego w ten sposób wielościanu oraz model wielościanu do niego dualnego (również o ścianach foremnych).

b) Sformułuj metodę otrzymania tego wielościanu dualnego.

Rozwiązanie.

a) Wielościan powstały z ośmiościanu foremnego przez obcięcie naroży w sposób podany w treści zadania to czternastościan o ośmiu ścianach sześciokątnych i sześciu kwadratowych, przy czym w każdym wierzchołku zbiegają się dwa sześciokąty i kwadrat (jak na rysunku 1). Wielościan dualny do niego ma oczywiście 14 wierzchołków i aż 24 ściany będące trójkątami (równobocznymi). Najłatwiej go otrzymać „obudowując” sześcian ostrosłupami czworokątnymi prawidłowymi (rys. 2).

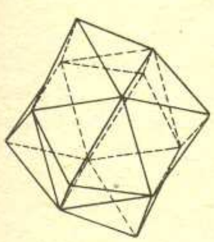


Rys. 1

b) Pomysły mogą być różne. Najbardziej naturalne to:

1° Połączenie środków sąsiednich ścian danego czternastościanu.

2° Wykorzystanie pojęcia czynności dualnych omówionego w audycji radiowej. Przecięciu czterech ścian naroża ośmiościanu piątą płaszczyzną odpowiada tu połączenie czterech wierzchołków ściany sześcianu z piątym punktem.



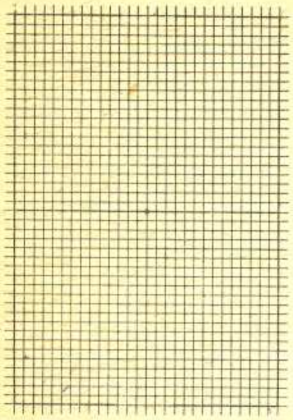
Rys. 2

W przyszłym roku szkolnym (1978/1979) nasze audycje będą nadawane w następujących terminach:

We wrześniu — 21; w październiku — 19; w listopadzie — 9 i 30; w grudniu — 14; w lutym — 15; w marcu — 15; w maju — 3 i 31 — zawsze o godzinie 10°° w programie IV.

Nasz adres:

Polskie Radio
skrytka pocztowa 46
00-950 Warszawa
Radio-Delta

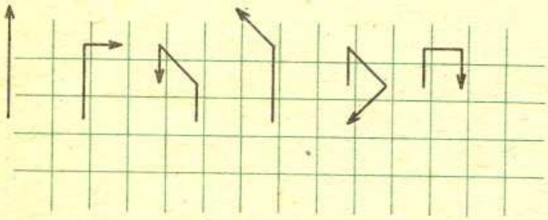


rys. 1

Piłka nożna na kartce papieru

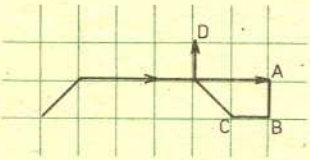
W okresie, gdy każdy Polak, poza niemowlętami, pasjonuje się piłką nożną i my nie chcąc pozostać w tyle, prezentujemy grę w „piłkę nożną" na papierze. Gra jest ciekawa, wymaga pomysłowości i dostarcza interesującej rozrywki. Podobnie jak w normalną piłkę, może grać w nią każdy, a systematyczny trening doprowadza do mistrzostwa.

Jest kilka wariantów tej gry. My opiszemy jeden z prostszych. Można go urozmaicić, wprowadzając nowe przepisy na wzór prawdziwych reguł piłkarskich. Boiskiem do naszej gry jest duży prostokąt kratkowanego papieru. Na boisku mniejszym niż kartka z zeszytu gra szybko staje się nieciekawa. Przez środek boiska przebiega linia środkowa, na środku której leży wyimaginowana piłka. Po obu stronach boiska stoją bramki (rys. 1).



rys. 2. Różne rodzaje ruchów

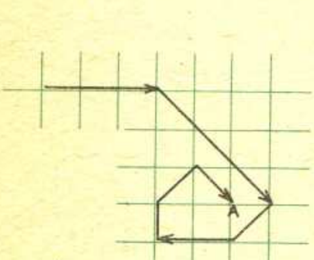
W grze uczestniczą dwie osoby. Rozpoczynamy grę od środka przez „kopnięcie piłki" na połowę przeciwnika. To „kopnięcie", czy raczej wjechanie z piłką jest podstawowym ruchem w naszej grze. Polega ono na narysowaniu strzałki o długości trzech „jednostek", przy czym przez „jednostkę" rozumiemy zarówno długość boku kratki, jak i długość przekątnej pojedynczej kratki (rys. 2). Po wykonaniu ruchu wyobrażona piłka znajduje się w końcu narysowanej strzałki (bardziej zaawansowani gracze mogą nie rysować ostrzy strzałek). Teraz wykonuje ruch drugi z graczy. Oczywiście stara się skierować piłkę w stronę bramki przeciwnika i w dalszym ciągu gry gracze stawiają na przemian swoje strzałki, a gol jest zdobyty wówczas, gdy piłka przekroczy linię bramkową. Grą rządzą następujące reguły:



rys. 3

1°) Najważniejszym prawidłem naszej gry jest to, że żadne strzałki nie mogą się przecinać, pokrywać, ani mieć wspólnych końców — chyba, że zachodzi jeden z wyjątków, opisanych poniżej w punktach 3° i 4°. Przykładowo, postawienie na rysunku 3 strzałki ABCD jest sprzeczne z zasadami gry;

2°) Ruch „kopnięcie piłki" nie może być krótszy ani dłuższy niż trzy jednostki. Dlatego od czasu do czasu gracz zostaje zablokowany przez przeciwnika lub siebie i nie może zrobić ruchu. Na rys. 4 widzimy, że gracz, który postawił strzałkę kończącą się w A, zablokował przeciwnika. W takim wypadku gracz, który pozbawił przeciwnika możliwości ruchu, a więc odebrał mu piłkę, ma prawo do wykonania „podania piłki";

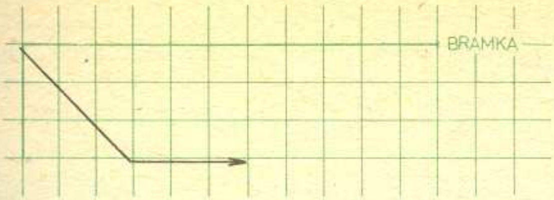


rys. 4

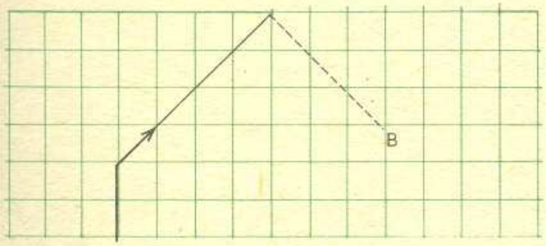
3°) „podanie piłki" polega na narysowaniu strzałki o długości 6 jednostek w dowolnym kierunku, choćby nawet przecinała uprzednio narysowane linie co przy zwykłym ruchu jest zabronione. W odróżnieniu od zwykłego ruchu strzałka nie może być jednak łamana (rys. 5).

rys. 5

Jeżeli po podaniu przeciwnik znów nie może zrobić ruchu, lub gdy koniec strzałki wypada w punkcie już zajętym, mamy prawo do następnego podania. To właśnie stanowi o urodzie naszej gry. Systemem sprytnych podań można niejednokrotnie przejść całe boisko. Z podania można zdobyć bramkę;

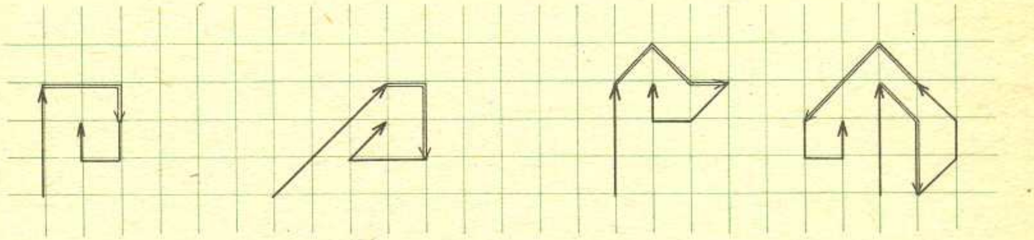


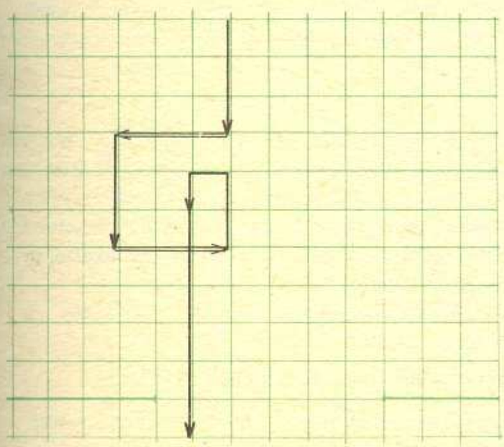
rys. 6. Rzut rożny



rys. 7. Odbicie piłki od słupka

4°) gdy gracz zostaje zablokowany przy brzegu boiska, może się ratować wykopem piłki na aut boczny lub rożny. Wykop piłki na aut — to strzałka długości 3 jednostek, może ona przecinać już narysowane linie. Wyrzut z autu nie różni się od „podania" (punkt 3°), natomiast wykonanie rzutu rożnego polega na narysowaniu strzałki długości 6 jednostek. Strzałka ta może być złamana w jednym miejscu lub nie być złamana w żadnym (rys. 6);
5°) po zdobyciu każdej bramki narysowanych linii nie ściera się i wobec tego nie można na nich rysować strzałek — zgodnie z punktem 1°. Następuje jednak zamiana bramek — tak jak w futbolu dziewiętnastowiecznym. Zwiększa to szanse na wyrównanie gry — bez zmiany bramek zdobywca pierwszej prawie na pewno wygrałby cały mecz. Po zdobytej bramce grę zaczynamy nie z punktu środkowego bo ten jest już zajęty, ale z dowolnego punktu na linii środkowej;
6°) po strzale na bramkę piłka może odbić się od słupka (rys. 7). Gdy gracz, na którego przypada kolej ruchu, strzeli na bramkę, jak na rys., to piłka znajdzie się w punkcie B. Tę zagrywkę może wykorzystać też obrońca.
Gra może trwać do ustalonej przedtem liczby goli, albo — co jest bardzo ciekawe — „na czas", to znaczy na przykład do 90 posunięć. Te posunięcia trzeba oczywiście liczyć na oddzielnym „zegarze boiskowym". Ten wariant wprowadza do naszej gry elementy „gry na czas" dla utrzymania korzystnego wyniku.
Bardzo interesujący wariant powstaje wówczas, gdy dorysujemy pola bramkowe i dodamy przepis, że w obrębie pola bramkowego nie liczą się linie powstałe przy zdobywaniu poprzednich goli (można je wycierać gumką).
Kilka uwag techniczno-praktycznych. Teren zyskujemy zastawiając pułapki na przeciwnika i wykorzystując podania, za pomocą których można niejednokrotnie przejść całe boisko. Na rys. 8 widzimy najbardziej typowe sytuacje, w których gracz został zablokowany.


rys. 8. Najbardziej typowe pułapki


rys. 9. Gol — kiks obrońcy!

Doskonalenie techniki w naszej piłce nożnej polega na ćwiczeniach w natychmiastowym spostrzeganiu błędnych, lub po prostu nie najlepszych ruchów przeciwnika, a właściwa taktyka polega, ogólnie rzecz biorąc, na spychaniu przeciwnika w stronę już narysowanych linii i zmuszania go do wykonywania coraz bardziej niewygodnych posunięć.

M.S.