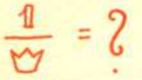
Nierówności elementarne i ekstrema

Dr Arkadiusz PŁOSKI



lekcja?

Rozwiązanie zadania M 166.
Zauważmy, że $2 \cdot 10+5 \cdot 10 = 70$, a więc jeżeli liczby naturalne x i y spełniają równanie $2x+5y = 70$, to $2(x-10) = 5(10-y)$. Ponieważ liczba $5(10-y)$ jest podzielna przez 2 oraz 2 i 5 są względnie pierwsze, więc $2|10-y$ czyli $10-y = 2t$, gdzie t jest pewną liczbą całkowitą. Jest więc $2(x-10) = 5 \cdot 2 \cdot t$, $x-10 = 5t$, skąd $x = 10+5t$, a poprzednio otrzymaliśmy równość $y = 10-2t$. Zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia największej wartości sumy $(10+5t)+(10-2t) = 20+3t$, gdzie t jest liczbą całkowitą spełniającą nierówności $10+5t > 0$ i $10-2t > 0$ czyli $-2 < t < 5$. Funkcja $t \to 20+3t$ jest rosnąca, a więc dla całkowitych wartości t z przedziału $(-2, 5)$ przyjmuje największą wartość dla $t = 4$. Wartością tą jest 32.

Niektóre zadania prowadzące do wyznaczania ekstremów (tzn. maksimów i minimów) funkcji wielu zmiennych można rozwiązać stosując pewne nierówności, a więc środkami bardziej elementarnymi niż te, które są zwykle wykładane w podręcznikach analizy matematycznej.
Nie mając tu pretensji do opisania wszystkich elementarnych metod wyznaczania ekstremów opartych na nierównościach, ograniczymy się do podania przykładów zastosowań nierówności mających swe źródło w wypukłości pewnych funkcji.
Funkcję rzeczywistą f zdefiniowaną na pewnym podzbiorze ciała liczb rzeczywistych nazywamy wypukłą w dół na przedziale I (zawartym w dziedzinie tej funkcji), gdy spełnia ona następujące warunki:
($\mathbf{W}_1$) funkcja f jest ograniczona na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym zawartym w I,
($\mathbf{W}_2$) dla dowolnych różnych liczb $x_1, x_2 \in I$ zachodzi nierówność

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right) < \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

Definicję funkcji wypukłej w górę otrzymujemy zatrzymując warunek ($\mathbf{W}_1$) i zastępując w warunku ($\mathbf{W}_2$) znak $<$ znakiem $>$. Zatem funkcja g jest wypukła w górę, gdy funkcja $-g$ jest wypukła w dół. Czytelnik może łatwo zinterpretować geometrycznie wypukłość funkcji.
W podanych niżej przykładach sprawdzenie warunku ($\mathbf{W}_1$) nie przedstawia trudności, dlatego zajmujemy się sprawdzeniem tylko drugiego warunku.

Przykłady.

a) Funkcja *sinus* jest wypukła w górę na przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Istotnie jeśli weźmiemy pod uwagę $x_1, x_2 \in \langle 0, \pi \rangle$ takie, że $x_1 \neq x_2$, to $0 < \cos\left(\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right) < 1$, a więc

$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2) = \sin\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right) < \sin\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right).$$

b) Funkcje $x \to x^m$, gdzie $m > 1$ jest liczbą całkowitą, są wypukłe w dół dla $x \geqslant 0$.
Sprawdzenie, że funkcja $x \to x^2$ jest wypukła w dół pozostawiamy Czytelnikowi. Załóżmy, że funkcja $x \to x^m$ jest wypukła w dół na rozważanym przedziale. Wykażemy wypukłość funkcji $x \to x^{m+1}$. Niech x_1, x_2 będą różnymi liczbami nieujemnymi. Ponieważ $(x_1^m-x_2^m)(x_1-x_2) > 0$ zatem $x_1x_2^m+x_2x_1^m < x_1^{m+1}+x_2^{m+1}$.

Korzystając z tej nierówności i z wypukłości funkcji $x \to x^m$ otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{m+1} < \frac{1}{4}(x_1^m+x_2^m)((x_1+x_2) < \frac{1}{2}(x_1^{m+1}+x_2^{m+1}).$$

c) Funkcje wykładnicze $x \to a^x$ $(0 < a \neq 1)$ są wypukłe w dół w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych: gdy $x_1 \neq x_2$ to $(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}})^2 > 0$ a więc $a^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)} < \frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2})$.

Zadanie. Pokazać, że funkcje $x \to \sqrt{x^2+h^2}$, dla $h \neq 0$ są wypukłe w dół w zbiorze liczb rzeczywistych.

W rachunku różniczkowym funkcji zmiennej rzeczywistej podaje się warunki dostateczne na wypukłość funkcji; powyższe przykłady pokazują, że w prostych przypadkach można wypukłość funkcji sprawdzić bezpośrednio. Podstawową nierównością, z której będziemy korzystali, jest podana niżej nierówność Jensena.

Twierdzenie Jensena. *Niech f będzie funkcją wypukłą w dół na przedziale I i niech $p_1, \ldots, p_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunki:*

$$p_i > 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad \textit{oraz} \quad p_1+\ldots+p_n = 1.$$

Wtedy

$$f(p_1x_1+\ldots+p_nx_n) \leqslant p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n)$$

dla dowolnych liczb $x_1, \ldots, x_n \in I$. Równość ma miejsce tylko wtedy, gdy $x_1 = \ldots = x_n$.

Dowód powyższego twierdzenia wymaga bliższego zbadania pojęcia wypukłości i wykorzystuje pojęcie ciągłości. Tutaj udowodnimy nierówność Jensena tylko dla przypadku, gdy liczby $p_1, \ldots, p_n$ są wymierne. Dowód przeprowadzimy w trzech krokach.

I. Załóżmy, że $p_1 = \ldots = p_n = 1/2^m$, gdzie $m \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą. W tym przypadku nierówność Jensena ma postać:

$$f\left(\frac{1}{2^m}(x_1+\ldots+x_{2^m})\right) \leqslant \frac{1}{2^m}(f(x_1)+\ldots+(f(x_{2^m})).$$

Powyższą nierówność udowodnimy indukcyjnie względem m. Gdy $m = 1$ nierówność redukuje się do warunku ($\mathbf{W}_2$). Załóżmy więc, że nierówność jest prawdziwa dla $m \geqslant 1$ i niech $x_1, \ldots, x_{2^{m+1}} \in I$.

Mamy $$f\left(\frac{1}{2^{m+1}}(x_1+\ldots+x_{2^{m+1}})\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^m}}{2^m}+\frac{x_{2^m+1}+\ldots+x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^m}}{2^m}\right)+f\left(\frac{x_{2^m+1}+\ldots+x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2^{m+1}}(f(x_1)+\ldots+f(x_{2^{m+1}})).$$

Rozwiązanie zadania M 168.

Zadanie to można rozwiązać stosując rachunek różniczkowy. Pokażemy tu jednak, jak można uniknąć stosowania go, wykorzystując twierdzenie o średniej geometrycznej i arytmetycznej:

Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi (por. art. A. Płoskiego) nierówność $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, przy czym nierówność ta staje się równością tylko w przypadku, gdy wszystkie liczby a_i są równe.

Zastosowanie tego twierdzenia do liczb $x, x, 1-x, 1-x$ nie da żądanego efektu:

$$x^2(1-x)^3 \leqslant \left[\frac{1}{5}(3-x)\right]^5 \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^5,$$

aby zaś zachodziła równość $x^2(1-x)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^5$ musiałoby być $x = 1-x$, czyli $x = \frac{1}{2}$, wtedy zaś badana funkcja przyjmuje wartość $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

Zastosujemy więc pewien trik: zachodzi równość

$$x^2(1-x)^3 = ax \cdot ax \cdot \frac{1-x}{a^{2/3}} \cdot \frac{1-x}{a^{2/3}} \cdot \frac{1-x}{a^{2/3}}.$$

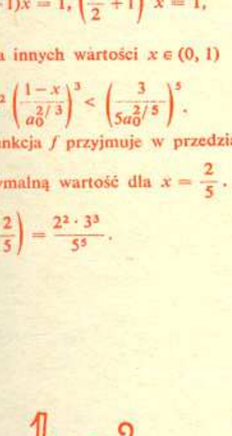
Dobierzemy teraz odpowiednią wartość a. Zastosujemy twierdzenie o średniej geometrycznej i arytmetycznej

$$(ax)^2 \left(\frac{1-x}{a^{2/3}}\right)^3 \leqslant \left(\frac{2ax+3-3x}{5a^{2/3}}\right)^5,$$

dla takiej wartości a, dla której po prawej stronie nierówności współczynnik przy x staje się zerem, czyli dla $a_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/5}$.

Dla tej wartości a ostatnia nierówność staje się równością tylko dla takiej wartości x, dla której $a_0 x = \frac{1-x}{a_0^{2/3}}$, czyli $(a_0^{5/3}+1)x = 1$, $\left(\frac{3}{2}+1\right)x = 1$, $x = \frac{2}{5}$. Dla innych wartości $x \in (0, 1)$ mamy $(a_0 x)^2 \left(\frac{1-x}{a_0^{2/3}}\right)^3 < \left(\frac{3}{5a_0^{2/5}}\right)^5$.

Tak więc funkcja f przyjmuje w przedziale $(0, 1)$ maksymalną wartość dla $x = \frac{2}{5}$. Jest nią $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2^2 \cdot 3^3}{5^5}$.



Posłużyliśmy się tu warunkiem (W_2) a następnie założeniem indukcyjnym. Nierówności $\leqslant$ można zastąpić przez równości tylko wtedy, gdy $x_1 + \ldots + x_{2^m} = x_{2^m+1} + \ldots + x_{2^{m+1}}$, $x_1 = \ldots = x_{2^m}$ oraz $x_{2^m+1} = \ldots = x_{2^{m+1}}$, a więc wtedy, gdy $x_1 = \ldots = x_{2^{m+1}}$.
Ta uwaga kończy dowód twierdzenia Jensena w rozważanym przypadku.

II. Pokażemy, że $f\left(\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) < \dfrac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n))$ dla dowolnego układu nierównych liczb $x_1, \ldots, x_n \in I$. W tym celu obierzmy liczbę całkowitą m taką, że $2^m > n$ i zastosujmy udowodnioną w I nierówność do układu 2^m liczb:

$$x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n), \ldots, \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n),$$

w którym ostatnia liczba występuje $2^m - n$ razy. Mamy:

$$f\left(\frac{1}{2^m}\left(x_1+\ldots+x_n+\frac{2^m-n}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)\right) < \frac{1}{2^m}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)+(2^m-n)f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\right).$$

Stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy żądaną nierówność.

III. Niech teraz $p_1, \ldots, p_n$ będzie ciągiem liczb wymiernych dodatnich takim, że $p_1 + \ldots + p_n = 1$ i niech $x_1, \ldots, x_n \in I$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych nierównych. Możemy napisać: $p_i = \dfrac{k_i}{l_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ gdzie $0 < k_i < l_i$ są liczbami naturalnymi. Oznaczmy $l = l_1 \cdot \ldots \cdot l_n$ i zastosujmy nierówność udowodnioną w części II dowodu do ciągu $x_1, \ldots, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_n$, w którym liczba x_i występuje $\dfrac{k_i l}{l_i} = k_i l_1 \ldots \cdot l_{i-1} l_{i+1} \cdot \ldots \cdot l_n$ razy.

Mamy
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = f\left(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i l}{l_i}x_i\right) < \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i l}{l_i}f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i),$$

co kończy dowód nierówności Jensena dla przypadku, gdy $p_1, \ldots, p_n$ są liczbami wymiernymi.
W dowodzie powyższym korzystaliśmy tylko z warunku (W_2) definicji funkcji wypukłej w dół, warunek (W_1) jest niezbędny do dowodu twierdzenia w całej ogólności.

Rozważmy teraz kilka zadań o maksimach i minimach.

Przykłady.

a) *W zbiorze wszystkich n-kątow wpisanych w dane koło o promieniu $r > 0$ wyznaczyć wielokąt o polu maksymalnym.*

Rozważmy dowolny n-kąt wpisany w koło o promieniu r i niech $x_1, \ldots, x_n$ będą miarami kątów środkowych opartych na kolejnych bokach wielokąta. Zatem $x_i \in \langle 0, \pi \rangle$ oraz $x_1 + \ldots + x_n = 2\pi$. Pole rozważanego wielokąta dane jest wzorem $\frac{1}{2}r^2(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n)$.

Stosując nierówność Jensena do funkcji *sinus* wypukłej w górę na przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ i liczb $p_1 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$ otrzymujemy: $\dfrac{1}{n}(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n) \leqslant \sin\dfrac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \sin\dfrac{2\pi}{n}$,

zatem pole n-kąta wpisanego w koło o promieniu r jest nie większe od $\dfrac{1}{2}r^2 n \sin\dfrac{2\pi}{n}$, przy czym maksimum jest osiągnięte gdy $x_1 = \ldots = x_n$, a więc rozwiązaniem zadania jest n-kąt foremny.

b) *Na płaszczyźnie dany jest trójkąt o bokach a, b, c. Niech $h > 0$ będzie liczbą rzeczywistą i rozważmy zbiór wszystkich ostrosłupów o wysokości h, których podstawą jest dany trójkąt. Należy wyznaczyć ostrosłup należący do rozważanego zbioru o minimalnym polu powierzchni bocznej.*

Ostrosłup z rozważanego zbioru jest jednoznacznie wyznaczony przez podanie rzutu M jego wierzchołka na płaszczyznę trójkąta. Położenie punktu M jest określone przez podanie odległości x, y, z punktu M od odpowiednich boków trójkąta, przy czym każdą z tych odległości bierzemy ze znakiem plus, gdy punkt M leży z tej samej strony odpowiedniego boku, co cały trójkąt, ze znakiem minus — w przeciwnym wypadku. Mamy: $ax+by+cz = 2P$, gdzie P oznacza pole trójkąta. Natomiast pole powierzchni bocznej ostrosłupa dane jest wzorem:

$$\frac{1}{2}\left(a\sqrt{x^2+h^2}+b\sqrt{y^2+h^2}+c\sqrt{z^2+h^2}\right).$$

Funkcja $\sqrt{x^2+h^2}$ jest wypukła w dół, zatem na mocy nierówności Jensena

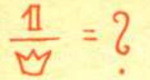
$$\sqrt{(px+qy+rz)^2+h^2} \leqslant p\sqrt{x^2+h^2}+q\sqrt{y^2+h^2}+r\sqrt{z^2+h^2}$$

dla liczb dodatnich p, q, r spełniających warunek $p+q+r = 1$. Podstawiając $p = \dfrac{a}{a+b+c}$, $q = \dfrac{b}{a+b+c}$ oraz $r = \dfrac{c}{a+b+c}$ i korzystając z nierówności $ax+by+cz \leqslant 2P$ otrzymujemy:

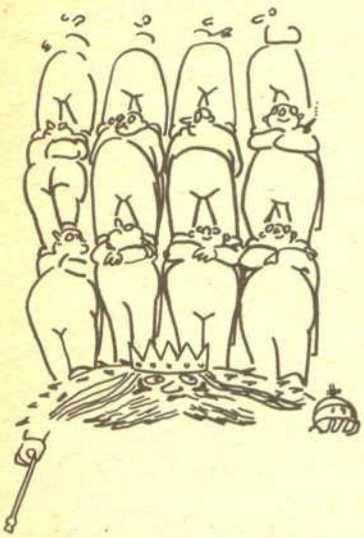
$$(a+b+c)\sqrt{\frac{4P^2}{(a+b+c)^2}+h^2} \leqslant a\sqrt{x^2+h^2}+b\sqrt{y^2+h^2}+c\sqrt{z^2+h^2},$$

przy czym równość zachodzi tylko w przypadku gdy $x = y = z$, a więc minimalne pole powierzchni bocznej ma ostrosłup, którego rzut wierzchołka M jest środkiem koła wpisanego w dany trójkąt.

Zadanie. *Wyznaczyć minimum sumy m-tych potęg: $x_1^m + \ldots + x_n^m$ liczb nieujemnych x_i zakładając, że ich suma a jest stała i dodatnia.*



Niech teraz $p_1, \ldots, p_n$ będzie ciągiem liczb spełniających założenia twierdzenia Jensena.
Wykażemy następującą nierówność:
Nierówność dla średniej geometrycznej. *Dla dowolnych* $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$: $x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \leqslant p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$ *przy czym równość ma miejsce tylko wtedy, gdy* $x_1 = \ldots = x_n$.
Dla dowodu wystarczy obrać liczby t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tak, że $x_i = 10^{t_i}$ i zastosować nierówność Jensena do funkcji wykładniczej $t \to 10^t$ wypukłej w dół w całym zbiorze liczb rzeczywistych.
Zauważmy, że dla $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ otrzymujemy nierówność $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$, która orzeka, że średnia geometryczna skończonego układu liczb nie przekracza średniej arytmetycznej.
Możemy teraz łatwo udowodnić następujące:
Twierdzenie (maksimum iloczynu przy stałej sumie) *Jeśli suma n liczb dodatnich* $x_1, \ldots, x_n$ *jest stała, to iloczyn* $x_1^{q_1} \ldots, x_n^{q_n}$ *gdzie* $q_1, \ldots, q_n$ *są dowolnymi liczbami dodatnimi ma największą wartość wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{x_1}{q_1} = \ldots = \frac{x_n}{q_n}$.
Dowód: Połóżmy $c = x_1 + \ldots + x_n$, $q = q_1 + \ldots + q_n$; stosując nierówność dla średniej geometrycznej otrzymujemy: $\left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{\frac{q_1}{q}} \ldots \left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{\frac{q_n}{q}} \leqslant \frac{c}{q}$, stąd $\left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{q_1} \ldots \left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{q_n} \leqslant \left(\frac{c}{q}\right)^{q}$;
iloczyn $x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$ jest największy, gdy największy jest iloczyn po lewej stronie ostatniej nierówności, a więc gdy $\frac{x_1}{q_1} = \ldots = \frac{x_n}{q_n}$.
Dowód twierdzenia podanego niżej przebiega podobnie.
Twierdzenie (minimum sumy przy stałym iloczynie). *Jeżeli iloczyn* $x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$ *jest stały, to suma* $x_1 + \ldots + x_n$ *ma najmniejszą wartość, gdy* $\frac{x_1}{q_1} = \ldots = \frac{x_n}{q_n}$.



hierarchia?

Przykłady.
a) *Spośród wszystkich trójkątów o danym obwodzie wyznaczyć trójkąt o największym polu*
Niech $2p$ będzie obwodem trójkąta o bokach x, y, z; kwadrat jego pola jest dany wzorem Herona: $p(p-x)(p-y)(p-z)$. Ponieważ $(p-x)+(p-y)+(p-z) = p$ i $p-x > 0$, $p-y > 0$, $p-z > 0$, zatem iloczyn $(p-x)(p-y)(p-z)$ jest największy, gdy $p-x = p-y = p-z$, a więc rozwiązaniem zadania jest trójkąt równoboczny.
b) *Spośród wszystkich prostopadłościanów o danej objętości wyznaczyć prostopadłościan o najmniejszym polu powierzchni.* Niech v będzie objętością prostopadłościanu o krawędziach x, y, z. Pole powierzchni prostopadłościanu jest zatem równe $2(xy+xz+yz)$. Ponieważ $(xy)(xz)(yz) = v^2$ oraz $xy > 0$, $xz > 0$, $yz > 0$ zatem suma $yx+yz+xz$ jest najmniejsza, gdy $xy = xz = yz$, a więc gdy $x = y = z$. Rozwiązaniem zadania jest sześcian.
Proponujemy Czytelnikowi rozwiązanie podanych niżej zadań.
Zadania.
1) Znaleźć największą wartość funkcji $\sin x + \sin y - \sin(x+y)$ w trójkącie ograniczonym osiami x, y i prostą $x+y = 2\pi$.
2) Spośród wszystkich prostopadłościanów o danym polu powierzchni wyznaczyć prostopadłościan o największej objętości.
2) Niech p, q będą liczbami dodatnimi. Znaleźć maksimum funkcji $(\cos x)^p(\sin x)^q$ w przedziale $\langle 0, 2\pi)$.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 166. Wyznaczyć największą wartość sumy liczb naturalnych x i y spełniających równanie $2x+5y = 70$.
Rozwiązanie na str. 10
M 167. Na płaszczyźnie dana jest prosta k oraz punkty A i B leżące po różnych jej stronach. Wyznaczyć na prostej k punkt X, dla którego $|AX-BX|$ przyjmuje wartość największą.
Rozwiązanie na str 7.
M 168. Funkcja f jest określona na przedziale (0, 1) wzorem $f(x) = x^2(1-x)^3$. Obliczyć największą wartość tej funkcji.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 55. Napięcie powierzchniowe na płaskiej granicy kryształu i roztworu zależy od orientacji tej granicy względem kierunków krystalograficznych.
Napięcia powierzchniowe kryształu pokazanego na rysunku, znajdującego się w roztworze nasyconym tej samej substancji, z której zbudowany jest kryształ, na wzajemnie prostopadłych ścianach wynoszą odpowiednio σ_1, σ_1 i σ_2. Kryształ znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej z roztworem. Należy wyznaczyć stosunek krawędzi a/c.
Wpływ siły ciężkości na kryształ i roztwór zaniedbujemy.
Rozwiązanie na str. 4