Suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ jest słynną funkcją ζ (dzeta) Riemanna, mającą duże znaczenie w teorii liczb i jeszcze kilku gałęziach matematyki

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ na ułamek łańcuchowy niearytmetyczny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{6|}{|5} - \frac{1^6|}{|117} - \ldots - \frac{(n-1)^6|}{|34n^3-51n^2+27n-5} - \ldots .$$

Z rozwinięcia tego wynika, że liczba $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest niewymierna. Dla liczby $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fakt taki znany był już od 1770 r., na wynik Apery'ego czekano zatem ponad 200 lat.
Dowody większości podanych tu twierdzeń Czytelnik znajdzie w książkach W. Sierpińskiego „Działania nieskończone", rozdział XI i „Teoria liczb", rozdział XII, a wiele innych ciekawych informacji w książeczce *А. Хинчин, Цепные дроби.*

Zastosowania ułamków łańcuchowych

Podamy tylko kilka przykładów tych zastosowań. Pełniejszą teorię może Czytelnik znaleźć w książkach: *A.J. Banarski „Równania nieoznaczone", A.O. Гельфонд „Решение уравнений в целых числах"* i *W. Sierpiński „Działania nieskończone"*. Opisane przykłady pochodzą z tych książek.

1. Rozwiązywanie równań w liczbach całkowitych. Rozpatrzmy równanie $127x-52y+1 = 0$, które chcemy rozwiązać w liczbach całkowitych. Rozwijamy najpierw $\frac{127}{52}$ na ułamek łańcuchowy (np. metodą opisaną w artykule A. Schinzla):

$$\frac{127}{52} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$$

W tak otrzymanym wyrażeniu skreślamy ostatni ułamek, tj. $\frac{1}{5}$, i obliczamy wartość otrzymanego nowego ułamka łańcuchowego (bezpośrednio lub korzystając z twierdzenia 1 artykułu A. Schinzla): $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}} = 2+\cfrac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{22}{9}$.

Obliczamy następnie różnicę $\frac{127}{52}-\frac{22}{9} = -\frac{1}{52\cdot 9}$.
Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$127\cdot 9-52\cdot 22 = -1,$$

a zatem otrzymaliśmy rozwiązanie równania: $x = 9$, $y = 22$. Wiadomo, że gdy dane jest jedno całkowitoliczbowe (x_0, y_0) rozwiązanie równania $Ax+By+C = 0$, gdzie A i B są względnie pierwsze, to wszystkie pozostałe wyrażają się wzorami $x = x_0-Bt$, $y = y_0+At$, gdzie t jest dowolną liczbą całkowitą.

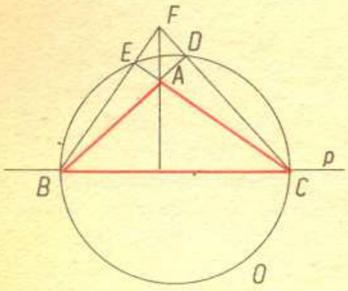
2. Rozpatrzmy równanie $25x+18y = 970$. Jak poprzednio, zacznijmy od rozwinięcia $\frac{18}{25}$ na ułamek łańcuchowy:

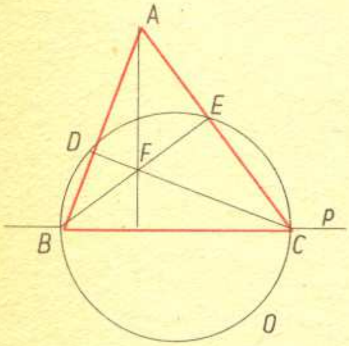
$$\frac{18}{25} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

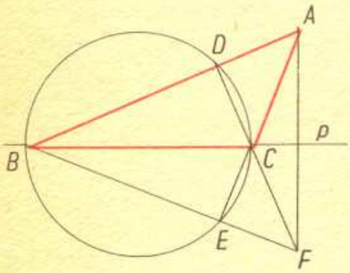
Odrzucamy $\frac{1}{3}$ i obliczamy: $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5}{7}$

Ponieważ zaś $\frac{18}{25}-\frac{5}{7} = \frac{1}{25\cdot 7}$, więc (mnożąc przez wspólny mianownik) otrzymujemy

Rozwiązanie zadania M 195.
Kąty BDC i BEC są wpisane w okrąg o i oparte na jego średnicy BC, są więc kątami prostymi. Wynika stąd, że odcinki BE i CD są wysokościami trójkąta ABC. Prosta AF przechodzi przez trzeci wierzchołek tego trójkąta i punkt przecięcia dwóch jego wysokości, jest więc jego wysokością prostopadłą do boku BC, czyli do prostej p.







$$18\cdot 7-5\cdot 25 = 1, \text{ a inaczej } 25\cdot(-5)+18\cdot 7 = 1.$$

Pomnóżmy tę ostatnią równość przez 970:

$$25\cdot(-5\cdot 970)+18\cdot(7\cdot 970) = 970.$$

Mamy zatem już jedno rozwiązanie $x_0 = -5\cdot 970 = -4850$, $y_0 = 970\cdot 7 = 6790$. Rozwiązaniem ogólnym będzie wobec tego

$$x = -4850+18t$$
$$y = 6790-25t.$$

Możemy nieco uprościć te wzory, mianowicie podstawiając $t+270$ zamiast t. Dostaniemy

$$x = -4850+18t+4860 = 10+18t, \quad y = 6790-25t-6750 = 40-25t.$$

3. Wyciąganie pierwiastka kwadratowego. Obliczymy $\sqrt{23}$, znając jego wartość przybliżoną 4,8 (a w zasadzie wiedząc tylko, że $4{,}5 < \sqrt{23} < 5{,}0$). Mamy najpierw $\sqrt{23} = 4+\frac{1}{x_1}$, gdzie $x_1 > 1$.

Aby obliczyć x_1, napiszemy $\frac{1}{x_1} = \sqrt{23}-4$, stąd $x_1 = \frac{1}{\sqrt{23}-4} = \frac{\sqrt{23}+4}{7} = 1+\frac{1}{x_2}$,
gdzie $x_2 > 1$. Obliczamy teraz x_2 metodą podobną do obliczania x_1:

$$\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{23}+4}{7}-1 = \frac{\sqrt{23}-3}{7}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{23}+3}{2} \approx 3{,}9, \text{ zatem } x_2 = 3+\frac{1}{x_3},$$

gdzie jak i poprzednio $x_3 > 1$. Wyznaczamy następnie x_3, otrzymując

$$x_3 = 1+\frac{1}{x_4}.$$

Dalej mamy $\frac{1}{x_4} = \frac{\sqrt{23}-4}{7}$, a stąd $x_4 = \sqrt{23}+4 = 8+\frac{1}{x_1}$ i widzimy, że dalsze x_i będą się powtarzać (por. twierdzenie 7 artykułu A. Schinzla). Otrzymujemy nieskończony okresowy ciąg równości

$$\sqrt{23} = 4+\frac{1}{x_1}, \quad x_1 = 1+\frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 3+\frac{1}{x_3}, \quad x_3 = 1+\frac{1}{x_4}, \quad x_4 = 8+\frac{1}{x_1} \text{ itd.}$$

Po podstawieniach otrzymujemy

$$\sqrt{23} = 4+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|3}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|8}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|3}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|8}+\ldots.$$

4. W podobny sposób można otrzymywać rozwinięcia innych liczb niewymiernych. Rzecz jasna, tylko dla niewymierności kwadratowych będą to ułamki okresowe. Przykładowo:

$$\log 5 = \frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|3}+\frac{1|}{|9}+\ldots,$$

$$\sqrt[3]{2} = 1+\frac{1|}{|3}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|5}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\ldots.$$

5. Rozwijanie funkcji na ułamki łańcuchowe. Rozpatrzmy funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{6x^4+12x^3+13x^2+10x+1}{6x^3+12x^2+7x+1}.$$

Jej rozwinięcie na ułamek łańcuchowy możemy otrzymać stosując algorytm Euklidesa (por. uwagi między twierdzeniem 3 a twierdzeniem 4 w artykule A. Schinzla):

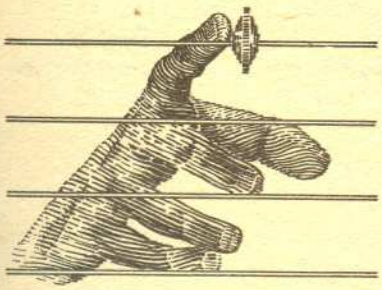
dzielimy	przez	otrzymując	
		iloraz	i resztę
$6x^4+12x^3+13x^2+$ $+10x+4$	$6x^3+12x^2+7x+1$	x	$6x^2+9x+4$
$6x^3+12x^2+7x+1$	$6x^2+9x+4$	x	$3x^2+3x+1$
$6x^2+9x+4$	$3x^2+3x+1$	2	$3x+2$
$3x^2+3x+1$	$3x+2$	x	$x+1$
$3x+2$	$x+1$	2	x (*)
$x+1$	x	1	1
x	1	x	

Ściśle rzecz biorąc w miejscu zaznaczonym (*) odeszliśmy od algorytmu Euklidesa, w którym reszta powinna mieć mniejszy stopień niż dzielnik. Znalezione rozwinięcie jest nieco „zgrabniejsze" od otrzymanego wtedy, gdy postępowalibyśmy konsekwentnie do końca. Mamy zatem

$$f(x) = x + \frac{1|}{|x} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|x} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|x}.$$

Dr Michał SZUREK

Czytelnicy proponują



Paweł PASZKO z Krakowa, student inżynierii chemicznej, pokazał, jak obliczać wartości logarytmów oraz wyrażeń postaci x^y na kalkulatorach, które tych funkcji nie mają.

Zaczynamy od tego, że, jak wiadomo, $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Zatem, dla bardzo dużych N będzie zachodzić przybliżona równość $$e^x \simeq \left(1+\frac{x}{N}\right)^N.$$

Stąd, uwzględniając, że $x = e^{\ln x}$, obliczymy szybko, że

(1) $$\ln x \simeq N(\sqrt[N]{x}-1).$$

Przyjmijmy np. $N = 1024 = 2^{10}$. Zauważmy, że wyciągnięcie pierwiastka stopnia 1024 — to 10-krotne wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego, a nawet najprostsze kalkulatory mają funkcję „pierwiastek kwadratowy". Wzór (1) nadaje się do praktycznych obliczeń inżynierskich: na 8-cyfrowym kalkulatorze przy $N = 2^{10}$ możemy obliczyć logarytmy naturalne liczb mniejszych niż 10 z dokładnością do 3–4 miejsc znaczących, a przy $N = 2^{15}$ i 11-cyfrowym kalkulatorze dokładność wzrasta do 5–6 miejsc. Niestety maleje przy większych liczbach, choć np. przy $N = 2^{10}$, ln 100 otrzymujemy jeszcze z dokładnością do ok. 1%.
Ze wzoru (1), pamiętając że $x^y = e^{y\cdot\ln x}$, prosto otrzymujemy

(2) $$x^y \simeq [1+(\sqrt[N]{x}-1)y]^N$$

i wzór (2) w pełni nadaje się do obliczeń na kalkulatorach, mających operację „x^2" i „$\sqrt{x}$"; jak poprzednio, należy za N przyjąć potęgę 2.
Ciekawe, że oba wzory (1) i (2) dają dokładniejsze wyniki, niż można by się spodziewać, sądząc ze sposobu ich wyprowadzenia. Przykładowo przy $N = 2^{10}$ obliczamy z nich
$2^3 \simeq 7{,}9987$, $(1{,}5)^{2{,}3} \simeq 2{,}5404$ (wobec dokładnego 2,54103 ...),

$\sqrt[10]{2} \simeq 1{,}07179$ (wobec dokładnego 1,0717735 ...), $e^\pi \simeq 23{,}07$ (a dokładnie jest $e^\pi = 23{,}14$ ...)

i szczególnie przy niewielkich wykładnikach wzór ten w pełni nadaje się do praktycznych obliczeń inżynierskich. Gdy $N = 2^{15}$, to na 11-cyfrowym kalkulatorze można otrzymywać bardzo dokładne wyniki (ale takie kalkulatory już przeważnie mają funkcję x^y).
Logarytmy można bardzo dokładnie obliczać, wykorzystując rozwinięcie

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right).$$

Na przykład przyjmując $n = 1$ otrzymujemy rozwinięcie liczby ln 2

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{9^5}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9^6}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{9^7}+\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{9^8}+\dots\right)$$

i ograniczając się do wypisanych powyżej wyrazów można na kartce papieru obliczyć ln 2 z dokładnością do 9 cyfr po przecinku: $\ln 2 = 0{,}693147180\dots$. Podstawiając $n = 4$, otrzymujemy

$$\ln 5 = 2\ln 2 + \frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{81}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81^2}+\dots\right),$$

potem możemy obliczyć np. $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$ i w podobny sposób logarytmy innych liczb.
Wyciąganie pierwiastków również możemy robić bardzo dokładnie korzystając z szeregu dwumiennego $(1+x)^m = 1+mx+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\dots,\quad |x|<1.$

Przypuśćmy mianowicie, że trzeba obliczyć $\sqrt[k]{A}$, przy czym znamy już jego wartość przybliżoną a.
Jeśli przyjmiemy $\frac{A}{a^k} = 1+x$, gdzie $|x|$ jest bardzo małe, to można pierwiastek przekształcić w sposób następujący $$\sqrt[k]{A} = a(1+x)^{1/k}$$

i skorzystać ze wzoru dwumiennego dla $m = 1/k$. Wyniki będą bardzo dokładne.