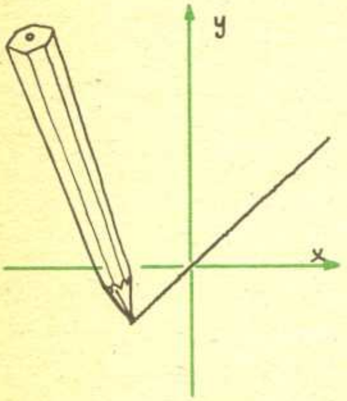
O odręcznym wykreślaniu funkcji $y=x$

Jerzy GERESZ



Wyobraźmy sobie, że ktoś wręcza nam ołówek (ale nie daje nam linijki) i poleca wykreślić funkcję $y = x$ w zadanym układzie współrzędnych. Zadanie to sprowadza się do wykreślenia linii prostej, przechodzącej przez początek układu i nachylonej pod kątem 45° do obydwu osi. Przy ,,odręcznym" wykreślaniu takiej funkcji efekt będzie taki, jak na rysunku obok: wykres nieuchronnie będzie pokrzywiony. Ujmując proces wykreślania ,,dynamicznie" powiemy, że kierunek ruchu końcówki ołówka różnił się tu na ogół od właściwego (tego pod kątem 45°). Jednakże patrząc na wykres z rysunku stwierdzamy, że pomimo zniekształceń uwydatnia on szereg specyficznych własności jakościowych funkcji $y = x$. Wykres ten przedstawia funkcję ściśle rosnącą, która wzajemnie jednoznacznie odwzorowuje oś x na oś y, czyli jest odwracalna; można go uważać za wykres funkcji gładkiej, odwrotna do której jest również gładka. Krótko mówiąc — próba odręcznego wykreślenia funkcji $y = x$ doprowadziła do wykreślenia pewnego diffeomorfizmu osi x na oś y.

Spróbujmy wyrazić w ścisłych terminach powyższe intuicje. Zaburzony wykres funkcji $y = x$ jest to wykres funkcji postaci $y = x+s(x)$, gdzie człon $s(x)$ opisuje ,,zaburzenie". Odchyłki kierunku ruchu ołówka przy sporządzaniu wykresu są scharakteryzowane wartościami pochodnej $\frac{ds}{dx}(x)$. Przedstawiony wyżej opis sugeruje nam, iż ma miejsce następujący **fakt** matematyczny:

Funkcja postaci $y = x+s(x)$ dla $s(x)$ o niezbyt dużych wartościach pierwszej pochodnej jest diffeomorfizmem zbioru liczb rzeczywistych na siebie.

Mówimy, że funkcja $f: R \to R$ jest *diffeomorfizmem* (niektórzy piszą: dyfeomorfizmem), jeżeli jest wzajemnie jednoznaczna, różniczkowalna, jej pochodna jest ciągła i stale różna od zera. Pojęciem diffeomorfizmu posługiwaliśmy się w ,,eseju o pękaniu błony mydlanej" (Delta 5/1976). Tematyka tamtego artykułu ma wiele wspólnego z zagadnieniami opisywanymi obok.

Udowodnimy ten fakt.

Z elementarnych twierdzeń rachunku różniczkowego wiemy, że funkcja odwrotna do funkcji wszędzie różniczkowalnej o niezerowych wartościach pochodnej jest również wszędzie różniczkowalna. Cały problem sprowadza się więc do wykazania wzajemniej jednoznaczności funkcji $y = x+s(x)$ gdy $\left|\frac{ds}{dx}(x)\right|$ jest wszędzie odpowiednio małe. Konkretnie — trzeba wykazać, że każdej wartości y odpowiada wówczas dokładnie jedno x spełniające równość $x+s(x) = y$. Otóż zauważmy, że równanie $x+s(x) = y$ można napisać w postaci $x = y-s(x)$, a to z kolei można zapisać jako $x = \Phi_y(x)$, gdzie symbol $\Phi_y(x)$ oznacza $y-s(x)$. Widzimy więc, że problem jednoznacznej rozwiązalności równania $x+s(x) = y$ jest równoznaczny z problemem, czy dla każdej wartości y odpowiadające jej odwzorowanie $\Phi_y(\cdot)$ ma dokładnie jeden punkt stały.

Patrz artykuły M. Kuczmy i L. Górniewicza.

Stwierdziliśmy, że taka sytuacja ma miejsce dla odwzorowań zwężających. Zastanówmy się więc, jakie warunki muszą być spełnione, by $\Phi_y(\cdot)$ było zwężające (w sensie metryki standardowej w R^1: $|x-y|$), czyli aby dla dowolnych $x_1, x_2 \in R^1$ i dla pewnego stałego $k (0 < k < 1)$ zachodziło

$$|\Phi_y(x_1)-\Phi_y(x_2)| \leqslant k|x_1-x_2|.$$

Ponieważ $\Phi_y(x) = y-s(x)$, mamy $\Phi_y(x_1)-\Phi_y(x_2) = y-s(x_1)-y+s(x_2) = s(x_2)-s(x_1)$. Widzimy zatem, że odwzorowanie $\Phi_y(\cdot)$ będzie zwężające wtedy i tylko wtedy, gdy zaburzenie $s(\cdot)$ dla każdej pary x_1, x_2 spełnia warunek:

$$|s(x_1)-s(x_2)| \leqslant k|x_1-x_2|.$$

Twierdzenie o wartości średniej mówi, że jeżeli pewna funkcja $s: R \to R$ jest różniczkowalna, to jej wartości w dwóch punktach $x_1, x_2 \in R$ są związane wzorem

$$s(x_1)-s(x_2) = (x_1-x_2)\cdot\frac{ds}{dx}(u),$$

gdzie u jest pewnym punktem przedziału (x_1, x_2).

Twierdzenie o wartości średniej (w odpowiednio zmodyfikowanej postaci) stosuje się również do funkcji wielu zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Z twierdzenia o wartości średniej w rachunku różniczkowym wiemy, że warunek ten będzie spełniony, jeżeli pochodna $\frac{ds}{dx}(x)$ w żadnym punkcie nie będzie co do modułu przekraczała ustalonej wartości $k < 1$.

Wykazaliśmy zatem podany wyżej fakt i uściśliliśmy prowizoryczne sformułowanie ,,przy niezbyt dużych wartościach pochodnej": chodzi mianowicie o to, by wartość $\left|\frac{ds}{dx}(x)\right|$ w żadnym punkcie nie przekraczała ustalonej liczby dodatniej $k < 1$.

Bystry Czytelnik powinien w tym miejscu skrzywić się z niesmakiem i zakrzyknąć: ≫A cóż to znowu za rewelacja! Jakieś wyciąganie armaty na wróbla! Przecież jeśli $s(x)$ ma wszędzie pochodną co do modułu ściśle mniejszą od jedności, to funkcja $y = x+s(x)$ będzie wzajemnie jednoznaczna jako funkcja ściśle rosnąca (bo jej pochodna będzie wszędzie dodatnia), i funkcja odwrotna do niej też będzie miała wszędzie pochodną! I po co w to mieszać jakieś odwzorowania zwężające!≪

Istotnie, gdyby zastosowania zasady Banacha miały się na tym zakończyć, niewiele byłaby ona warta. Ale spójrzmy na przeprowadzone rozumowanie jeszcze raz.

Niech x oznacza teraz nie pojedynczą liczbę, ale cały ich zespół, tzn.

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Poszczególne liczby $x_1, x_2, x_3, \ldots$ będziemy nazywać składowymi obiektu x. Mając dwa takie zespoły liczb możemy określić ich dodawanie i odejmowanie

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$
$$x-y = (x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n).$$

Wreszcie symbol $|x|$ możemy zdefiniować jako

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|+ \ldots +|x_n|, \text{ gdzie } |x_i| \text{ jest zwykłym modułem liczby } x_i.$$

Dla dowolnych dwóch zespołów n-liczbowych zachodzi nierówność $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, dzięki czemu funkcja $d(x, y)$ zdefiniowana jako $|x-y|$ jest dobrze określoną metryką (odległością) na zbiorze wszystkich takich zespołów n-liczbowych (który przyjęło się oznaczać R^n).

Wyrażenie $y = x+s(x)$ będziemy interpretować tak: każdemu zespołowi liczb $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przyporządkowujemy zespół liczb w następujący sposób:

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+s_1(x), x_2+s_2(x), \ldots, x_n+s_n(x))$$

$s(x) = (s_1(x), \ldots, s_n(x))$ oznacza tu teraz zespół funkcji rzeczywistych. Otóż przy takiej interpretacji symboli użytych w przedstawionym wyżej rozumowaniu możemy powiedzieć co następuje:

Jeżeli odwzorowanie przeprowadzające przestrzeń R^n w taką samą przestrzeń R^n określone wzorem $y = x$ (nazywa się je odwzorowaniem tożsamościowym) niezbyt mocno zaburzymy dodając do każdej jego i-tej składowej funkcję $s_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o dostatecznie małych wartościach pochodnych, to otrzymamy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne: każdemu y będzie odpowiadało tylko jedno x takie, że $y = x+s(x)$. Będzie istniało więc odwzorowanie doń odwrotne. Co więcej, wszystkie składowe tego odwrotnego odwzorowania będą funkcjami różniczkowalnymi względem wszystkich $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Odwzorowania o takiej własności nazywają się w analizie diffeomorfizmami — do tej pory słowa tego używaliśmy tylko w odniesieniu do funkcji jednej zmiennej. Wynik naszych rozważań podsumujemy następująco: Odwzorowanie identycznościowe przeprowadzające przestrzeń R^n w R^n jest strukturalnie stabilne w tym sensie, że niezbyt duże jego zaburzenia nie są w stanie pozbawić go własności pozostania diffeomorfizmem.

Tak rozumiana stabilność odwzorowania identycznościowego ma ogromne konsekwencje dla analizy, bowiem jedno z podstawowych twierdzeń tej dziedziny, tzn. twierdzenie o lokalnej odwracalności odwzorowań, bardzo prosto sprowadza się do kwestii odwracalności odwzorowania postaci $y = x+s(x)$.

Zainteresowanych odsyłamy do książeczki M. Spivaka ≫*Analiza na rozmaitościach*≪, PWN, Warszawa 1977, s. 46.

Zasada Banacha (???), czyli co jest nadzwyczajnego w liczbie 6174?

Napiszmy dowolną liczbę czterocyfrową byle nie 1111, 2222, 3333 itd. Z jej cyfr utwórzmy możliwie największą i możliwie najmniejszą liczbę: 9441 i 1449. Odejmijmy je:

$$9441-1449 = 7992.$$

Zróbmy to samo jeszcze raz:

$$9972-2799 = 7173$$

i dalej tak samo $7731-1377 = 6354$,
$6543-3456 = 3087$,
$8730-\ \ 378 = 8352$,
$8532-2358 = 6174$,
wreszcie $7641-1467 = 6174$.

Można powiedzieć: trafiliśmy w punkt stały naszej procedury. Jeżeli wystartujemy z innej liczby, zawsze prędzej czy później osiągniemy 6174.

Kącik filatelistyczny (15)

Christiaan Huygens (1629—1695) był holenderskim fizykiem, astronomem i matematykiem. Działał w Hadze i w Paryżu (w latach 1665—1681).

W dziedzinie fizyki badał różne zagadnienia mechaniki, zajmował się pomiarem czasu i skonstruował pierwszy zegar wahadłowy, razem z R. Hooke'm wprowadził stałe punkty termometru (topnienia lodu i wrzenia wody). Przede wszystkim jednak w słynnym „Traktacie o świetle" (*Traité de la lumière*, 1678) podał zarys falowej teorii światła. Sformułował zasadę, zwaną obecnie zasadą Huygensa, w myśl której każdy punkt ośrodka, do którego dochodzi fala, staje się źródłem nowych fal, tzw. fal elementarnych (w ośrodku izotropowym — kulistych), których obwiednia daje nowe położenie czoła fali. Zasada ta wyjaśnia szereg podstawowych zjawisk optycznych (odbicie, załamanie, dyfrakcję) i ma szerokie zastosowanie także przy opisie innych zjawisk falowych (np. powstawanie fali uderzeniowej w ośrodkach ciągłych).

W dziedzinie matematyki Huygens badał własności różnych krzywych, podał sposób obliczania powierzchni brył obrotowych i napisał pierwszy podręcznik rachunku prawdopodobieństwa.

Christiaan Huygens prowadził także różnorodne obserwacje astronomiczne za pomocą skonstruowanego przez siebie teleskopu z okularem achromatycznym, a w roku 1680 rozpoczął prace nad konstrukcją „maszyny planetarnej" — prototypu współczesnego planetarium.

Reprodukujemy znaczek z podobizną Ch. Huygensa wydany przez pocztę Holandii w roku 1928.

Jerzy BARTKE