Dualność w programowaniu liniowym

Najprostszą wersję zagadnienia programowania liniowego można sformułować następująco:
Znaleźć największą (lub najmniejszą) wartość funkcji liniowej zwanej funkcją celu

$$c(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

na zbiorze A określonym następującymi nierównościami:

$$(*)\quad \begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ \cdots\cdots \\ x_n \geqslant 0 \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \leqslant b_k. \end{cases}$$

(Zbiór A jest więc wielościanem wypukłym).
Z punktu widzenia „matematyki czystej" teoria tego problemu sprowadza się do stwierdzenia, że o ile poszukiwane maksimum istnieje, to jest przyjmowane w jednym z wierzchołków wielościanu A.
Wierzchołek taki możemy znaleźć rozwiązując układ n równań liniowych wybranych z równań

$$(**)\quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_n = 0 \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Tak więc, aby nasz problem rozwiązać, wystarczy:
1. rozwiązać wszystkie $\binom{n+k}{n}$ uzyskanych w ten sposób układów równań,
2. sprawdzić, czy rozwiązanie takiego układu spełnia pozostałe k warunków (*), czyli czy należy do zbioru A,
3. wybrać spośród znalezionych wierzchołków ten, w którym wartość funkcji c jest największa.
Niestety, „rozwiązanie" to nie ma wartości praktycznej: dla rozwiązania zagadnienia, w którym $n = 50$ zmiennych jest związane $k = 150$ warunkami, musielibyśmy rozpatrzyć $\binom{n+k}{n} = \binom{200}{50} \approx 10^{150}$ układów 50 równań z 50 niewiadomymi, co gwarantowałoby nam zajęcie na co najmniej 10^{10} lat.
Tak więc należałoby poszukać sprawniejszego algorytmu rozwiązywania naszego zagadnienia. Pytanie jeszcze, po co?
Otóż okazuje się, że wiele problemów „życiowych" (głównie natury ekonomicznej) formułuje się właśnie w terminach programowania liniowego.
Oto najprostszy przykład.
Możemy produkować n różnych wyrobów, przy czym zysk z produkcji jednostki i-tego wyrobu wynosi c_i, a jej wyprodukowanie wymaga a_{ij} jednostek j-tego surowca. Mamy do dyspozycji b_j jednostek j-tego materiału. Ile jednostek poszczególnych wyrobów powinniśmy wyprodukować, aby osiągnąć maksymalny zysk? Takie i podobne problemy pojawiają się dostatecznie często, aby było warto zająć się poważnie szukaniem metody ich rozwiązywania.
Nie będziemy tu omawiać szczegółowo najbardziej znanego takiego algorytmu (tzw. metody simplex), podamy tylko jej sens geometryczny.
Drogę do rozwiązania optymalnego zaczynamy od dowolnego wierzchołka w_1 wielościanu A (zwykle od punktu $(0, \ldots, 0)$).
Wśród wychodzących z tego wierzchołka krawędzi szukamy teraz tych, w kierunku których rośnie funkcja celu. Jeżeli takich krawędzi nie ma, jesteśmy już w wierzchołku poszukiwanym i możemy zakończyć pracę. W przeciwnym przypadku wybieramy krawędź „najbardziej obiecującą" i przechodzimy po niej do następnego wierzchołka, aby opisaną procedurę powtórzyć.
Wierzchołek optymalny znajdziemy wykonując co najwyżej k takich kroków.
Pora teraz na zapowiedzianą w tytule dualność. Otóż zagadnienie dualne polega na zamianie ról ograniczeń (materiałów w naszej interpretacji ekonomicznej) i zmiennych — czyli przejściu do przestrzeni sprzężonych — p. artykuł M. Szurka i gastronomiczny.
Otrzymujemy w ten sposób problem następujący:
Znaleźć minimum funkcji

$$d(w) = b_1w_1 + \ldots + b_kw_k$$

na zbiorze A wyznaczonym warunkami

$$\begin{cases} w_1 \geqslant 0 \\ \cdots\cdots \\ w_k \geqslant 0 \\ a_{11}w_1 + \ldots + a_{k1}w_k \geqslant c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}w_1 + \ldots + a_{kn}w_k \geqslant c_n. \end{cases}$$

Zagadnienie jest poprawnie sformułowane, występują w nim te same współczynniki co w zagadnieniu pierwotnym, ale co mają ze sobą wspólnego ich rozwiązania? I jaki jest ich sens?
Zauważmy, że w rozwiązaniu zagadnienia z l zmiennymi i m warunkami wartość niezerową może przybierać co najwyżej $\min(l, m)$ zmiennych (dlaczego?).
Jeżeli więc np. $k > n$, to rozwiązaniem zagadnienia dualnego będzie punkt $(w_1^0, \ldots, w_k^0)$, w którym co najwyżej n współrzędnych będzie różnych od zera. Wiemy, że zmienne w_i odpowiadają ograniczeniom (nierównościom) zagadnienia pierwotnego — wobec tego dokonaliśmy w ten sposób pewnego wyboru warunków. Okazuje się, że są to dokładnie te nierówności, które określają wierzchołek poszukiwany w zagadnieniu pierwotnym.
Warto zauważyć, że gdy $k \neq n$, rozwiązywanie zagadnienia pierwotnego i dualnego może się różnić złożonością rachunków i wobec tego w niektórych przypadkach rozważanie problemu dualnego może przynieść istotny zysk czasowy.
Czy można jeszcze dokładniej sprecyzować sens rozwiązania dualnego?
Okazuje się, że tak. Rozważmy mianowicie płaszczyzny wyznaczające poszukiwany wierzchołek x^0. Będą to płaszczyzny odpowiadające pewnym zmiennym w_i rozwiązania dualnego.
Jeżeli teraz $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ jest równaniem takiej płaszczyzny, to $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i + \varepsilon$ będzie równaniem bliskiej płaszczyzny równoległej. Takie „rozluźnienie" i-tego warunku spowoduje, że rozwiązanie optymalne x^0 przesunie się do położenia $x^{0\prime}$, dając pewien zysk na funkcji celu — zysk proporcjonalny do ε. Okazuje się, że współczynnikiem tej proporcjonalności jest właśnie w_i^0.
Gdybyśmy dokonali „analizy wymiarowej" problemu programowania liniowego w interpretacji ekonomicznej, okazałoby się, że w_i ma „wymiar" ceny zł/jednostka. Jest to tzw. cena dualna i-tego materiału, będąca miernikiem jego względnej wartości w określonej naszymi warunkami (*) sytuacji: materiały, których mamy w nadmiarze mają „cenę" 0, a materiały najbardziej potrzebne z punktu widzenia naszych celów — cenę najwyższą.

Mgr Krzysztof Nowiński

Pojęcia pierwotne w geometrii euklidesowej

Doc. dr Lesław W. SZCZERBA

Najbardziej znany układ pojęć pierwotnych pochodzi od Dawida Hilberta (1899). Pojęciami tymi są: *punkt, prosta, płaszczyzna, leży na, leży między* i *przystaje.* Punkty będą oznaczane małymi literami łacińskimi, duże litery łacińskie zarezerwujemy dla prostych, a małe greckie dla płaszczyzn (chyba, że zaznaczono inaczej). Relacja incydencji (*leży na*) będzie oznaczana przez I. Może ona zachodzić między punktami a prostymi lub płaszczyznami, a także między prostymi a płaszczyznami. Relacja *leżenia między* będzie oznaczana przez B i może zachodzić między trzema punktami. Wreszcie relacja *przystawania*, $\equiv$, może zachodzić dla dwu par punktów lub dwu par prostych. W pierwszym przypadku mówi się o przystawaniu odcinków, w drugim — kątów.
Nie jest to ani jedyny, ani nawet najprostszy układ pojęć pierwotnych. Prostszy zaproponował Alfred Tarski (1951). Składa się on z pojęć występujących już u Hilberta. Pojęciami tymi są mianowicie: *punkt, leży między, przystaje.* Ten układ pojęć pierwotnych też nie jest najekonomiczniejszy: relację *leżenia między* można zdefiniować za pomocą przystawania.