O początkach metody aksjomatycznej

Dr Jan WASZKIEWICZ

Jak już pisałem (Delta 3/1979), metodę dedukcyjną i jej najdoskonalszą postać — metodę aksjomatyczną można wyprowadzić ze zwykłej praktyki dyskusji, niezmiernie rozpowszechnionych w starożytnej Grecji. Warto zobaczyć, co o strukturze pierwszego znanego nam aksjomatycznego wykładu matematyki — ,,*Elementów*" Euklidesa może nam powiedzieć taka interpretacja.
Euklides podzielił swoje ,,Elementy" na 13 ksiąg, z których każdą rozpoczyna definicjami nowo wprowadzanych pojęć. W pierwszej księdze po dwudziestu trzech definicjach następują podstawowe stwierdzenia, przyjmowane bez dowodu (a więc aksjomaty, we współczesnym rozumieniu tego słowa). Zostawmy na boku definicje, które warte są osobnego omówienia. Warto może jedynie powiedzieć, że również wśród nich kryją się twierdzenia, dotyczące natury definiowanych obiektów, które we współczesnych ujęciach włączone byłyby raczej do systemu pewników, bądź z pewników wyprowadzone. Tak więc definicje i pewniki należy rozpatrywać łącznie, jako podstawę całego systemu.
Po definicjach następują postulaty i aksjomaty, których listę za chwilę przytoczę. Tutaj jeszcze wspomnę, że w terminologii Euklidesa pierwsza grupa oznaczona jest słowem ,,*wymagania*" (słowo ,,*postulatum*" jest dosłownym łacińskim tłumaczeniem tego terminu), natomiast druga grupa stwierdzeń nazwana jest ,,*pojęciami ogólnymi*".
A oto spis postulatów, przytoczony za książką ,,*O Elementach Euklidesa*", PWN, Warszawa 1956:

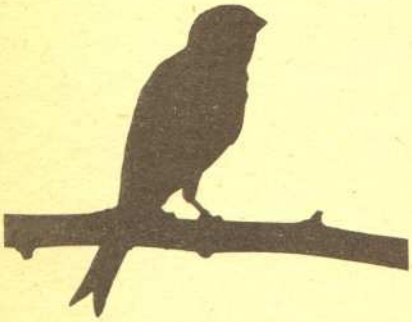
,,1. Zakłada się, że od każdego punktu do każdego punktu można poprowadzić linię prostą.
2. I że ograniczoną prostą można ciągle przedłużać po prostej.
3. I że z każdego środka każdym rozwarciem można zakreślić koło.
4. I że wszystkie kąty proste są równe między sobą.
5. I jeżeli prosta padająca na dwie proste tworzy po jednej stronie kąty wewnętrzne, które w sumie są mniejsze od dwóch prostych, to te proste przedłużone nieograniczenie schodzą się po tej stronie, po której kąty te w sumie są mniejsze od dwóch prostych".

Ostatni postulat, słynny ,,postulat o równoległych" jest już w samej swojej formie wyraźnie różny od pozostałych. Nic więc dziwnego, że to on właśnie budził liczne kontrowersje w ciągu stuleci. Ale nie o tym teraz mowa.
A oto spis aksjomatów:
,,1. Równe jednemu i temu samemu są między sobą równe.
2. I jeżeli do równych dodaje się równe, to i całe są równe.
3. I jeżeli od równych odejmuje się równe, to reszty są równe.
4. I wzajemnie przystające są między sobą równe.
5. I całe jest większe od części".

Jak można uzasadnić podział podstawowych założeń systemu na te dwie grupy? Pierwsza, rzucająca się w oczy różnica polega na tym, że wszystkie postulaty bezpośrednio dotyczą obiektów geometrycznych — dotyczą więc samego przedmiotu rozprawy, niejako określają jej przedmiot i zakres. Natomiast aksjomatom można nadać znaczenie znacznie ogólniejsze — nie wspomina się w nich bowiem o żadnych obiektach geometrycznych, a jedyny geometryczny termin ,,przystawanie" w aksjomacie 4 nie musi być (i tak zapewne było w czasach Euklidesa) interpretowany we współczesny, czysto geometryczny sposób. Druga różnica widoczna jest w sposobie, w jaki obie te grupy używane są w tekście ,,Elementów". Otóż z postulatów korzysta się (na ogół) świadomie, otwarcie powołując się na nie w rozumowaniach matematycznych. Natomiast aksjomaty są rejestrem (nie wszystkich!) sądów, które wykorzystuje się z reguły milcząco. Dopiero głębsza analiza pokazuje nam, w których miejscach i jaki użytek z nich uczyniono.
Tak więc, można powiedzieć, że inicjując dyskusję nad geometrią, Euklides rozpoczął ją od stwierdzeń, które można ująć następująco. ,,Używane przeze mnie pojęcia znaczą dla mnie co następuje (tutaj następowałaby lista definicji)... Od dyskutującego domagam się (postuluję) akceptacji następujących stwierdzeń (tu wymienić należałoby postulaty)... Wreszcie, uważam za oczywiste i będą w dalszym ciągu milcząco wykorzystywał następujące stwierdzenia (i tutaj wymienić należy aksjomaty)..."

Podział pewników na dwie grupy nie jest właściwy jedynie Euklidesowi. Stosuje go również w swoim traktacie ,,O kuli i walcu" Archimedes (choć nie jest jasne, czy kryterium podziału jest dokładnie to samo co u Euklidesa, o różnicach świadczy choćby inne nazewnictwo obu grup). Pierwszy zaś kodyfikator metody dedukcyjnej, Arystoteles, pisząc o postulatach zestawia je z ,,hipotezami". Jedne i drugie przyjmowane są przez nauczyciela (prowadzącego dyskusję) bez dowodu. Hipotezy przyjmowane są chętnie, czy wręcz traktowane za oczywiste, przez obie strony, natomiast takiego wymogu oczywistości nie stawia się postulatom. Obie strony mogą nie mieć o nich wyrobionego zdania, bądź nawet być zdania przeciwnego.

Rozwiązanie zadania **M 250**. Przypuśćmy że nasz ułamek ma okres o długości k cyfr, zaczynający się od l-tej cyfry będącej częścią zapisu n-cyfrowej liczby 2^m. Zauważmy teraz, że będą się powtarzać również kn-cyfrowe odcinki naszego zapisu i że istnieją dwie kolejne potęgi dwójki mające dokładnie kn cyfr. (Gdyby tak nie było, mielibyśmy $2^{p-1} < 10^{kn}, 2^{p+1} \geqslant 10^{kn+1}$, czyli $4 = 2^{p+1}/2^{p-1} > 10$, co jest niemożliwe). Wynika stąd jednak, że dostatecznie daleko mamy dwie sąsiednie kn — cyfrowe grupy cyfr, z których jedna jest zapisem 2^p, a druga — 2^{p+1}. Grupy te są więc różne, co przeczy założeniu istnienia okresu długości kn, a więc i k.



Rozwiązanie zadania **F 88**. Do rozważań jakościowych można przyjąć, że

(Szybkość suszenia) ~ $(P-p)$,

dzie: P — prężność pary nasyconej w temperaturze cieczy parującej
p — prężność pary wodnej w w powietrzu.

W idealnie szczelnym i stosunkowo niewielkim pomieszczeniu proces suszenia ulega zahamowaniu. Realne mieszkanie zawiera nieszczelności, przez które wypływa powietrze ciepłe, a napływa zimne. To ostatnie, mimo iż zawiera parę nasyconą, przynosi mniej wilgoci, niż jej odpływa na zewnątrz. Bilanse: cieplny (z uwzględnieniem ciepła doprowadzonego np. przez kaloryfery) oraz materiałowy (zawartości wody w mieszkaniu) ustalają odpowiednią wartość wyrażenia $(P-p)$. Zwykle jest ono małe i suszenie może trwać długo. Otwarcie lufcika jest zamierzonym zwiększeniem nieszczelności, przyspieszającym wysychanie bielizny dzięki wzrostowi różnicy prężności. Ale nie tylko — intensywniejsze prądy konwekcyjne zwiększają prędkość powietrza względem powierzchni suszonej, co również daje pożądany skutek. Doświadczenie życiowe gospodyni podpowiada jej, jak dalece należy rozhermetyzować mieszkanie. Przesada i tym razem nie jest wskazana. Dlaczego?

Można więc powiedzieć, że zadaniem hipotez, czy też aksjomatów (w terminologii Euklidesa symptomatycznie nazwanych ,,pojęciami ogólnymi" czy też ,,powszechnymi") byłoby jawne ujęcie pewnych elementów ,,zdrowego rozsądku", czy też intuicji wspólnej dyskutantom. Jeśli tak, to powstaje pytanie, jaką rolę mogą pełnić takie ustalenia.
Wydaje się, że pełnią one głównie rolę selekcjonującą potencjalnych rozmówców (tak, jak postulaty określały zakres dyskusji). Deklarując je, prowadzący dyskusję stwierdzał, że będzie rozmawiał jedynie z tymi, którzy podobnie jak on akceptują pewne powszechne sądy. Jednakże postępowanie takie ma sens jedynie wówczas, gdy wśród potencjalnych dyskutantów zdarzyć się mogą tacy, którzy nie akceptują sądów oczywistych dla innych i swoimi sprzeciwami paraliżowaliby spór z chwilą, gdy prowadzący go używaliby niedozwolonych (ich zdaniem) argumentów.

Czy jednakże można byłoby znaleźć ludzi, którzy wątpiliby w prawdziwość zdania, że ,,całe jest większe od części"? Tak, byli tacy i bynajmniej nie należeli do rzadkości.
Cała szkoła myślicieli skłonnych do odrzucenia przynajmniej niektórych aksjomatów Euklidesa zapoczątkowana została na przełomie VI i V wieku przed naszą erą przez Parmenidesa. Od nazwy miejscowości, w której urodził się i działał Parmenides (i jego uczniowie), nosi ona nazwę elejskiej. Grupę tę wysuwamy na początek dlatego, że jej pośrednia rola dla rozwoju matematyki jest trudna do przecenienia. Sam Parmenides uchodzi za pierwszego, który uzasadniał wypowiadane przez siebie sądy — a więc za twórcę dialektycznej metody filozofii, a pośrednio — metody dedukcyjnej. W swoim zaufaniu do dedukcji posuwał się Parmenides tak daleko, że w przypadku rozbieżności między wynikami swoich rozumowań (nie zawsze w pełni poprawnych) a świadectwami danych zmysłowych — opowiadał się po stronie tych pierwszych. Prowadziło to wprawdzie do wielu poglądów brzmiących dla nas dziwnie, ale miało dla rozwoju nauk dedukcyjnych daleko idące znaczenie. Postawę zbliżoną do postawy Parmenidesa reprezentują po dziś dzień liczni matematycy (już sam wybór pracy nad badaniem tworów czysto abstrakcyjnych świadczy o systemie wartości), a i wśród fizyków teoretyków można znaleźć wielu jej zwolenników...

Nas tu interesuje wszakże uczeń Parmenidesa, Zenon z Elei, który zostawił po sobie kilka paradoksów (*aporii* — co w dosłownym znaczeniu oznacza trudności), mających na celu pokazanie, że nie istnieje ruch, ani mnogość (czy też wielość). Wniosek, który stąd wysuwał, był taki, że to, co istnieje naprawdę (a nie tylko w złudnym świecie naszych wrażeń zmysłowych), musi być jedno, niepodzielne i niezmienne. Nie miejsce tu na rozważanie filozoficznych koncepcji Zenona, warto jednakże zauważyć, że jego aporie przez wiele stuleci zaprzątały uwagę filozofów oraz przedstawicieli nauk, które z ruchem i wielością mają do czynienia — matematyki i fizyki. Jeszcze obecnie zdarzają się nowe poświęcone im opracowania, a autorowi tego artykułu znany jest współczesny przypadek, kiedy poważne potraktowanie paradoksów Zenona doprowadziło do przewartościowania podstawowych koncepcji matematyki. Pozwoliło to zbudować alternatywny system teorii mnogości daleko odbiegający od powszechnie przyjmowanego, również akceptowalny z czysto logicznego punktu widzenia, a powodujący istotne zmiany w całym nadbudowywanym nad teorią mnogości gmachu matematyki. (Chodzi tu o tzw. alternatywną teorię mnogości czeskiego matematyka Petra Vopěnki).

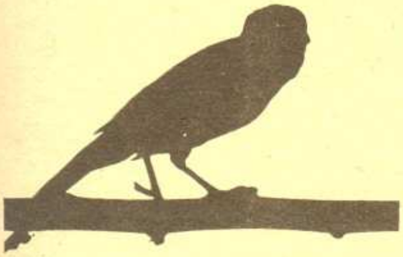
Dwa spośród paradoksów Zenona — paradoks strzały i paradoks Achillesa ścigającego się z żółwiem — są dobrze znane. Poświęćmy więc nieco uwagi dwóm innym.
Najbardziej znana spośród skierowanych przeciw wielości ,,aporia miary" doszła do nas w sformułowaniu: ,,Jeśli istnieje mnogość, to powinna ona jednocześnie być wielka i mała i przy tym wielka bez granic i mała bez granic". Czytelnika zainteresowanego prawdopodobnym tokiem rozumowania Zenona odesłać muszę do pierwszego tomu ,,*Historii matematyki*" (praca zbiorowa pod redakcją *A. P. Juszkiewicza*), Warszawa 1975, PWN, gdzie znaleźć można analizę zarówno tej, jak i innych aporii. Dla nas w tym miejscu będzie ważne jedynie następujące spostrzeżenie. Jeśli weźmiemy mnogość wielką bez granic, to na mocy aporii miary jest ona jednocześnie mała bez granic. Pierwszy aksjomat Euklidesa daje nam więc równość wielkiego bez granic i małego bez granic. To, że w wielkości wielkiej bez granic znajdziemy część małą bez granic, jest łatwe do pokazania metodami nie odbiegającymi od stosowanych przez Zenona. Część więc będzie równa całości...

Oczywiście można przyjąć tę aporię za prawdziwą i w związku z tym odmówić sobie i innym prawa używania aksjomatów Euklidesa i wniosków, które za ich pomocą otrzymano. Można też odrzucić rozumowanie (nie jest ono w pełni poprawne), bądź stosowane w nim nieostre pojęcia... Nie twierdzę, że wszystkie wyjścia są równie dobre, czy prowadzą do równie interesujących konsekwencji. Wiadomo tylko, że po sformułowaniu aporii trzeba było jakoś do nich ustosunkować się. Można to było zrobić choćby tak, jak Euklides. Ustalając swoje aksjomaty odmówił on po prostu dyskusji nad problemami pasjonującymi Zenona i licznych jego uczniów. Nazwa, jaką nadał swoim aksjomatom — ,,pojęcia ogólne", świadczy że uczynił to zgodnie ze swoimi najgłębszymi przekonaniami, nie zaś dla samej przyjemności toczenia sporu w imię zasady ,,zobaczymy, co z tego wyniknie"...

Rozwiązanie zadania **M 252**. Gdy x jest dowolną liczbą parzystą, liczba $P(x)-P(0) = a_n x^n + \ldots + a_1 x$ jest parzysta, a więc $P(x)$ jest nieparzyste. Z kolei gdy x jest nieparzyste, mamy

$$P(x)-P(1) = a_n(x^n-1) + \ldots + a_1(x-1)$$

i ponieważ potęgi x są nieparzyste, również $P(x)-P(1)$ jest parzyste. Wobec tego $P(x)$ jest nieparzyste i wobec tego żadna liczba całkowita nie może być pierwiastkiem $P(x)$.



Rozwiązanie zadania **F 89**. W danym problemie powietrze można traktować jak gaz doskonały. Wobec tego, energia wewnętrzna powietrza zawartego w mieszkaniu równa się iloczynowi liczby cząsteczek i ich średniej energii kinetycznej, bądź, co na jedno wychodzi, proporcjonalna do iloczynu liczby moli gazu i jego temperatury bezwzględnej. W naszym przypadku jest to uśredniona przestrzennie temperatura mieszkania

$$U \sim nT.$$

Włączenie piecyka podwyższa temperaturę gazu, a jednocześnie następuje zmiana jego ilości (część rozgrzanego gazu o większym ciśnieniu przenika do atmosfery przez nieszczelności). Eliminując liczbę moli n za pomocą równania Clapeyrona $PV = nRT$ otrzymuje się ostatecznie:

$$U \sim \frac{PV}{R}.$$

Wynik nie zależy od temperatury. Jeśli w trakcie nagrzewania wartość wyrażenia stojącego w liczniku nie ulegnie zmianie (w jakich przypadkach może to nastąpić?), energia wewnętrzna powietrza zawartego w mieszkaniu również się nie zmieni. Po cóż ogrzewamy więc mieszkania? Na to pytanie Czytelnik z pewnością sam odpowie. W rozwiązaniu pominęliśmy milczeniem współczynnik proporcjonalności w pierwszej z relacji. Jest nim molowe ciepło właściwe przy stałej objętości. Przyjęliśmy jego stałość w ramach rozpatrywanego modelu. Dokładniej rzecz biorąc, poszczególne składniki powietrza różnią się wartością tego ciepła. Czytelnik zechce sprawdzić, iż nawet po uściśleniu wynik pozostaje słuszny, o ile skład mieszaniny gazowej nie ulega zmianie.