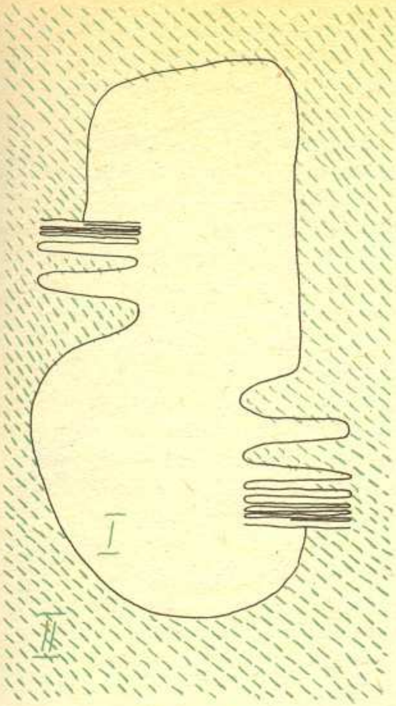
Z geometrii głębokiego interioru: kontinua nierozkładalne

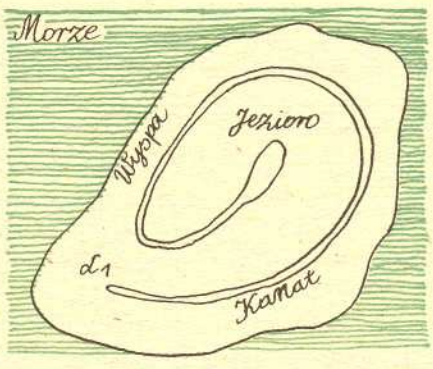


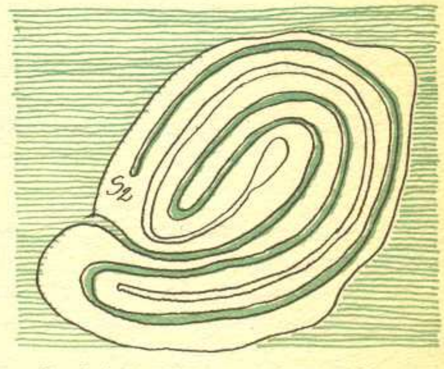
Rys. 1. Błąd Schönfliesa: wspólny brzeg tych dwu obszarów (I i II) jest sumą dwu łuków krzywych (A i B); okazuje się, że nie zawsze tak bywa.

Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

Jeszcze w r. 1908, pisząc o wspólnym brzegu dwu obszarów płaskich (z których jeden jest ograniczony), Schönflies uważał, że można ten brzeg rozłożyć na dwa łuki krzywe (przez łuk krzywy rozumiał w tym przypadku kontinuum nie rozcinające płaszczyzny lub, co na jedno tu wychodzi, kontinuum różne od całego brzegu). Był to błąd, który sprostował Brouwer w pracy ,,*Zur Analysis Situs*'' (Mathematische Annalen 68 (1910), 422—434). Przez *analysis situs* rozumiano wtedy topologię w klasycznym dla nas teraz zakresie, gdzie bada się te ,,własności utworów geometrycznych, które nie znikną, gdy utwory przekształcimy w dowolny sposób ciągły i jednoznaczny, czyli takich, które nie znikną po dowolnym wygięciu i rozciągnięciu bądź skurczeniu się figury (bez rozdarcia i bez zlepienia w jakimkolwiek miejscu)'', jak o tym pisał Janiszewski w artykule ,,*Topologja*'', str. 387—401, tomu I Poradnika dla samouków, Warszawa 1915. Rozprawa Schönfliesa uważana jest dotąd za dzieło, które nadało kierunek topologii, chociaż Brouwer wyliczył w niej pięć błędów (była mowa o jednym), a o dwu stwierdzeniach wyraził się jako o niepewnych.

Konstrukcja Brouwera dwu obszarów o wspólnym brzegu nie dającym się rozłożyć na dwa kontinua różne od całości weszła do literatury i do folkloru matematycznego w anegdotycznej formie jezior Wady (od nazwiska autora pomysłu), znanej z pracy Yoneyamy (1917): ,,Wyobraźmy sobie wyspę, na niej jezioro i następujący program budowy kanałów nawadniających. Pierwszego dnia ma być poprowadzony ślepo kończący się kanał wychodzący z jeziora tak, aby od każdego miejsca pozostawionego lądu było nie dalej niż 1 km do wody z jeziora (jak na rysunku po lewej; przez L_1 oznaczone jest zakończenie kanału).
Drugiego dnia ma być poprowadzony kanał wychodzący z morza, kończący się ślepo i prowadzony tak długo, aby od każdego miejsca pozostawionego lądu było nie dalej niż 1/2 km do wody morskiej (rysunek po prawej; przez S_2 oznaczone jest zakończenie kanału).



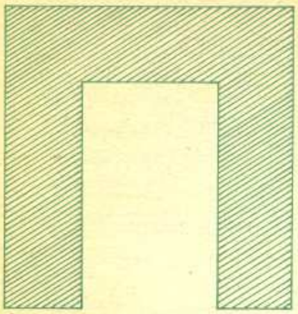


Rys. 2. Jeziora Wady; rysunki z pracy Yoneyamy.

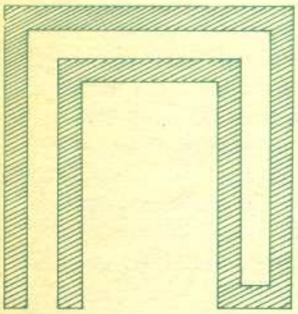
Trzeciego dnia ma być przedłużony pierwszy kanał poczynając od miejsca L_1 i ma być prowadzony tak długo, aby od każdego miejsca pozostawionego lądu nie było dalej niż 1/3 km do wody z jeziora.
Postępując tak w nieskończoność, na przemian z wodą morską i z jeziora, dojdziemy do tego, że z wyspy pozostanie jedynie pewien podzbiór (domknięty) rzadki i taki, że dowolnie blisko każdego jego punktu będzie można znaleźć zarówno wodę morską jak i wodę z jeziora: będzie to wspólny brzeg dwu obszarów, morza i jeziora''.

Nie było to dosłowne tłumaczenie z Yoneyamy; np. odległości nie były tam mierzone w kilometrach. W książce Aleksandrowa ,,*Kombinatornaja topologia*'' kolejne etapy budowy kanałów mają trwać 1, 1/2, 1/4, ... godziny, przez co praca nie potrwa za długo. W książce Hockinga i Younga ,,*Topology*'' kanały budowane w kolejnych dniach mają być tak wąskie, że zajmą 1/10, 1/100 etc. powierzchni wyspy, przez co pozostały wspólny brzeg będzie miał pole dodatnie; szkoda, że w sensie Lebesgue'a.

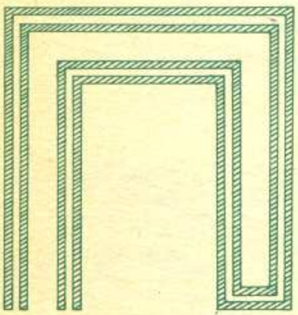
Dowód, że ten wspólny brzeg jest nierozkładalny, tj. że nie ma rozkładu na dwa kontinua różne od całości, jest nie do przeprowadzenia, jeśli się ma jedynie taki anegdotyczny opis, który zresztą nie jest jednoznaczny. Urysohn w ,,*Cantorsche Mannigfaltigkeiten*'' (1926) wprost pisze, że instrukcja Yoneyamy nie wystarcza dla przeprowadzenia takiego dowodu; można np. nie wykonywać jej w ten idealny sposób, jak to zrobił Brouwer i jak podpowiada najprostsza wyobraźnia (Brouwer, mimo że dał jednoznaczny opis, nie podał dowodu nierozkładalności swego kontinuum).



a)



b)



c)

Rys. 3. Pierwsze kroki konstrukcji Janiszewskiego.

Poprzestańmy na uwagach (poprzestają na nich również Brouwer i Yoneyama), że mając wyspę i na niej dwa jeziora można podobnym sposobem otrzymać wspólny brzeg trzech obszarów, i że podobnie, dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$, można zbudować wspólny brzeg n obszarów, oraz że można podobnie zbudować wspólny brzeg nieskończenie wielu obszarów.

Prace Kuratowskiego (1924 i 1928) wyjaśniły, czym może być brzeg jezior Wady: jeśli jest to wspólny brzeg trzech obszarów, to jest to kontinuum nierozkładalne lub suma dwu kontinuów nierozkładalnych. Przykłady Knastera (1927) pokazały, że obie możliwości się realizują.

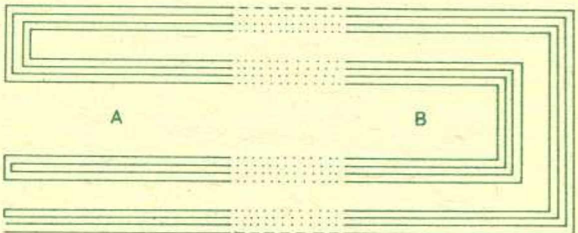
Janiszewski w swojej Tezie (1911) opisał kontinuum nierozkładalne, które stanowi esencję przykładu Brouwera. Nie rozspaja ono płaszczyzny (w przekładzie na język z pracy Yoneyamy znaczyłoby to, że nie ma jeziora na wyspie i prowadzi się kanały jedynie z morza).

Aby zbudować to kontinuum, z kwadratu C_1 podzielonego na 9 równych kwadratów (tak jak w konstrukcji Peany) usuwamy dwa kwadraty bez brzegu z dołu środkowego pionowego pasa (rys. 3a). Każdy kwadrat pozostałości C_2, która przypomina wstęgę, dzielimy znowu na 9 równych kwadratów i usuwamy z tej wstęgi środkowe pasmo kwadratów otwartych (pasmo o szerokości 1/9) zaczynające się na brzegu w lewym dolnym kwadracie wstęgi C_2 i kończące się w prawym dolnym kwadracie (ostatnim) tej wstęgi, nie dochodząc wszakże do jej brzegu, tak, że pozostałość C_3 jest również wstęgą (rys. 3b). Tę pozostałość rozcinamy podobnie jak przedtem wstęgę C_2; powstaje wstęga C_4 (rys. 3c).

Otrzymane kolejno wstęgi C_n dają w przekroju kontinuum.

Dowód nierozkładalności tego kontinuum da pojęcie o innych takich dowodach.

Dla jego przeprowadzenia przyjrzyjmy się podkontinuom różnym od całości. Dla każdego takiego podkontinuum istnieje wstęga C_n, a w niej kwadrat wolny od punktów takiego podkontinuum; taki kwadrat rozcina wstęgę C_n (na rysunku pokazana jest w formie rozprostowanej) lub wstęgę następną C_{n+1}. Dopełnienie takiego kwadratu składa się z dwu części: przekrój każdej z nich z kontinuum Janiszewskiego jest wiązką odcinków nad zbiorem Cantora, prostych (jak w części B na rys. 4), lub zgiętych (jak w części A). W obu przypadkach podkontinuum musi być podzbiorem jednego z odcinków wiązki. Jest więc rzadkie w całości.



Rys. 4. Po usunięciu jednego kwadratu ze wstęgi C_n kontinuum Janiszewskiego rozpada się na dwie wiązki odcinków rzadkich w tym kontinuum.

Teraz widać, że kontinuum Janiszewskiego jest nierozkładalne, bo skoro każde jego podkontinuum różne od całości jest w nim rzadkie, to nie może być ono sumą dwu takich podkontinuów (rzecz jest elementarna: nie ma nic wspólnego z twierdzeniem Baire'a, które m.in. orzeka, że przeliczalnie wiele zbiorów rzadkich nie może dać w sumie całości, jeśli ta jest zwarta).

*

Jeśliby continua nierozkładalne nie zostały odkryte jako wspólne brzegi obszarów na płaszczyźnie, to zostałyby odkryte przez algebraików. Oto ich opis solenoidu, odkrytego przez Vietorisa (1927) i zbadanego dokładniej przez van Dantziga (1930), kontinuum nierozkładalnego będącego jednocześnie grupą zwartą.

W grupie $C \times E$, gdzie C jest zbiorem Cantora traktowanym jako grupa liczb 2-adycznych i gdzie E jest prostą traktowaną jako grupa ze zwykłym dodawaniem, rozważmy podgrupę G złożoną z elementów (ne, n), gdzie n jest całkowite (e jest jednością 2-adyczną). Przez solenoid rozumiemy grupę ilorazową $(C \times E)/G$, w której zbiory otwarte (topologię) określa się przez zbiory otwarte w C i E ogólnie przyjętym sposobem.

Jest to ten sam solenoid, który znamy z opisów geometrycznych (p. Delta 8/1979). Nic tu nie jest niedopowiedziane. Opisy algebraiczne są chłodne, pozbawione kolorytu takiego jak w opisie jezior Wady. Algebraizuje się wszakże niewielki zakres geometrii: cały jej interior pozostaje w istocie nietknięty.

Solenoidu nie da się zbudować nie wychodząc z płaszczyzny, ale jego obraz powstały przez zlepienie ze sobą punktów algebraicznie przeciwnych jest już spłaszczalny: jest homeomorficzny z kontinuum Janiszewskiego (p. wzmianka w Delcie 8/1979, str. 3, gdzie to kontinuum było opisane w formie danej przez Knastera).

*

W latach 1909—1912 Brouwer ogłosił kilka prac, w których dowiódł, że homeomorfizm płaszczyzny nie zmieniający jej orientacji i nie mający punktów stałych jest (topologicznie) przesunięciem. Niektóre z tych pojęć na pewno wymagałyby wyjaśnień; poprzestańmy na jednym: przez punkt stały odwzorowania f rozumiemy każdy punkt p taki, że $f(p) = p$.

Rozwiązanie zadania M 255. Niech $1000 = k + (k+1) + \ldots + (k+m)$,

czyli $1000 = \frac{1}{2}(m+1)(2k+m)$, czyli $(m+1)(2k+m) = 2000$. Ponieważ $(2k+m) - (m+1) = 2k-1$, więc jedna z liczb $m+1$ i $2k+m$ jest parzysta, druga — nieparzysta. Równocześnie $2k+m > m+1$.

Mamy następujące rozkłady:

$2000 = 2000 \cdot 1 = 400 \cdot 5 = 80 \cdot 25 = 125 \cdot 16$

Odpowiednie wartości k i m to:

$m = 0$,	$k = 1000$	$(1000 = 1000)$
$m = 4$,	$k = 198$	$(1000 = 198 + \ldots + 202)$
$m = 24$,	$k = 28$	$(1000 = 28 + \ldots + 52)$
$m = 15$,	$k = 55$	$(1000 = 55 + \ldots + 70)$.

Brouwer pomylił się w pierwszym dowodzie. Opierając się na obalonych później przez siebie wyobrażeniach Schönfliesa o wspólnych brzegach obszarów, zredukował dowód do stwierdzenia (uważał je za oczywiste), według którego homeomorfizm płaszczyzny nie zmieniający jej orientacji i odwzorowujący na siebie pewne kontinuum nie rozcinające płaszczyzny ma w tym kontinuum punkt stały. W drugim, poprawnym, dowodzie dowiódł po drodze twierdzenia (skromniejszego) orzekającego, że homeomorfizm płaszczyzny nie zmieniający jej orientacji i odwzorowujący na siebie pewien jej podzbiór domknięty (niepusty) ma punkt stały, niekoniecznie należący do tego podzbioru. Brouwer miał twierdzić w rozmowach (p. komentarz redaktora *Collected Works* Brouwera na str. 218 tomu II; wydawnictwo North Holland 1976), że jego pierwszy dowód powinien dać się uratować, ale sam tego nigdy nie zrobił.

Dużo później (1951) Cartwright i Littlewood dowiedli, że każdy homeomorfizm kontinuum nie rozcinającego płaszczyzny dający się przedłużyć do homeomorfizmu płaszczyzny nie zmieniającego jej orientacji ma w tym kontinuum punkt stały (Bell (1978) pokazał, że założenie o orientacji można pominąć). O „Translationssatz" mało już kto wtedy pamiętał. Punkty stałe odwzorowań ciekawiły same przez się. Już wyniki uzyskane w latach trzydziestych pozwoliły na postawienie hipotezy głoszącej, że każde odwzorowanie ciągłe kontinuum (nie rozcinającego płaszczyzny) w siebie powinno mieć punkty stałe. Ta hipoteza nie została dotąd potwierdzona nawet dla homeomorfizmów. Jak dotąd wynikiem najdalej idącym w jej kierunku jest następujące twierdzenie, którego dowiedli niezależnie od siebie Bell, Iliadis i Sieklucki (1967; Iliadis 1970): jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym odwzorowującym w siebie kontinuum nie rozcinające płaszczyzny i nie mającym punktów stałych, to brzeg tego kontinuum zawiera kontinuum nierozkładalne niejednopunktowe C takie, że $f(C) = C$. Przeszkodą dla potwierdzenia hipotezy są więc już tylko kontinua nierozkładalne zawarte w brzegach kontinuów nie rozcinających płaszczyzny, np. brzegi kanałów Wady. Kontinua, które tak jak kontinuum Janiszewskiego są przekrojami wstęg, nie są przeszkodą: na nich odwzorowania ciągłe mają zawsze punkty stałe.
Błędy Schönfliesa i Brouwera przyśpieszyły rozwój całego działu topologii; tego, w którym później topologia w Polsce przeżywała swoje złote lata. Brzmi to jak przyznawanie błędom, a przynajmniej niektórym, roli twórczej. Coś może w tym jest, ale w dużej mierze tolerancja ta może być wynikiem tego, że błędy są dawne i nie nasze.

*

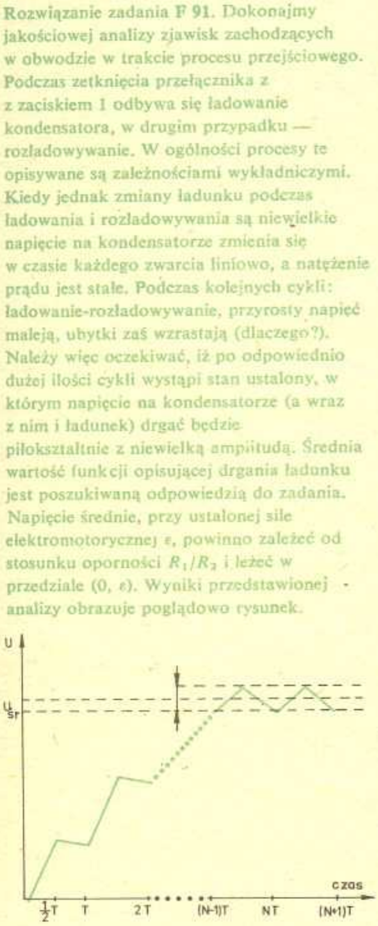
Opisane zagadnienia pojawiły się na obrzeżu analizy: wspólne brzegi obszarów w teorii funkcji analitycznych, a punkty stałe w teorii równań różniczkowych, gdzie homeomorfizmy płaszczyzny pojawiają się w naturalny sposób przy rozpatrywaniu układów równań $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u(x, y)$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = v(x, y)$, dając punkt wyjścia dla całej dyscypliny matematycznej, *topologii dynamicznej*. Mimo tego rodowodu, nie można stłumić wątpliwości co do realności tak osobliwych zjawisk. Zastanówmy się nad tym.

Interior geometryczny płaszczyzny, jak wszystko w matematyce (nawet liczby i figury, które wrosły w nią przed tysiącami lat), istnieje na mocy przyjętych konwencji. Należy do nich od ponad stu lat konwencja ciągłości zbioru liczb rzeczywistych utożsamianego z prostą. Chociaż ta konwencja przystaje do wielu zjawisk przyrody i odpowiada naszym usposobieniom tak, że gotowiśmy ją nieraz przyjąć za naturę rzeczy, to ta natura rzeczy na pewno nie jest aż tak idealna. Matematycy-konstruktywiści odrzucają pełną konwencję ciągłości: poszerzając zbiór liczb wymiernych, zapewniają byt liczbom takim jak $\sqrt{2}$, e i π, ale nie dopuszczają do istnienia liczb rzeczywistych, które nie są granicami ciągów dających się określić, np. rekurencyjnie. Prowadzi to do zanegowania istnienia wielu punktów również i na konwencjonalnej (ciągłościowej) płaszczyźnie, a w rezultacie i wielu podzbiorów tej płaszczyzny, m.in. kontinuów nierozkładalnych.

Ale to właśnie odkrywca kontinuów nierozkładalnych, L. E. J. Brouwer (1881—1966), twórca intuicjonizmu, był prekursorem konstruktywizmu. W serii prac (pierwsza z r. 1918) ratował topologię kierunku Schönfliesa przed naporem własnych wątpliwości, nie pisząc jednak (według wiedzy autora artykułu) bezpośrednio nic o kontinuach nierozkładalnych; może nie zdążył, a może nie musiał się bronić?

W matematyce bada się bezpośrednio świat jej konwencji. Mimo to nie zapomina się o realności, dla której poznania te konwencje zostały powołane. Jeśli do tej samej realności zastosujemy inne konwencje, to powinniśmy tę realność zobaczyć inaczej, co jedynie naszą wiedzę o niej może wzbogacić. Nigdy nie znajdziemy się w krainie jezior Wady, która jest tworem konwencji matematycznej. Ale możemy się znaleźć na wyspie, opracować program budowy kanałów według wskazówek Yoneyamy, a potem wypełniać ten program dzień po dniu; możemy użyć do tego odpowiednio zaprogramowanego automatu. Wtedy, już nawet nie jako konstruktywiści, zrozumiemy, że jeziora Wady istnieją nie tylko w naszej wyobraźni.

Rozwiązanie zadania F 91. Dokonajmy jakościowej analizy zjawisk zachodzących w obwodzie w trakcie procesu przejściowego. Podczas zetknięcia przełącznika z z zaciskiem 1 odbywa się ładowanie kondensatora, w drugim przypadku — rozładowywanie. W ogólności procesy te opisywane są zależnościami wykładniczymi. Kiedy jednak zmiany ładunku podczas ładowania i rozładowywania są niewielkie napięcie na kondensatorze zmienia się w czasie każdego zwarcia liniowo, a natężenie prądu jest stałe. Podczas kolejnych cykli: ładowanie-rozładowywanie, przyrosty napięć maleją, ubytki zaś wzrastają (dlaczego?). Należy więc oczekiwać, iż po odpowiednio dużej ilości cykli wystąpi stan ustalony, w którym napięcie na kondensatorze (a wraz z nim i ładunek) drgać będzie piłokształtnie z niewielką amplitudą. Średnia wartość funkcji opisującej drgania ładunku jest poszukiwaną odpowiedzią do zadania. Napięcie średnie, przy ustalonej sile elektromotorycznej ε, powinno zależeć od stosunku oporności R_1/R_2 i leżeć w przedziale $(0, \varepsilon)$. Wyniki przedstawionej analizy obrazuje poglądowo rysunek.



Zauważmy, że wskutek założonej równości czasów ładowania i rozładowywania średnie prądy płynące w stanie ustalonym przez każdą z gałęzi obwodu są równe. Mamy więc sytuację, w której dzięki kondensatorowi w obwodzie ε, R_1, R_2 płynie prąd, z tym że przez różne elementy przepływ następuje niejednocześnie. Nie przeszkadza to, aby uznać średnie napięcie na kondensatorze za równe napięciu na R_2 w obwodzie powstałym przez zwarcie ze sobą zacisków 1 i 2. Można je łatwo znaleźć z praw Ohma:

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\varepsilon.$$

Przyjmując, że średnie napięcie na kondensatorze $U_{\text{śr}} = U_2$, ze wzoru na pojemność kondensatora otrzymujemy ostateczną odpowiedź:

$$Q_{\text{śr}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}C\varepsilon.$$