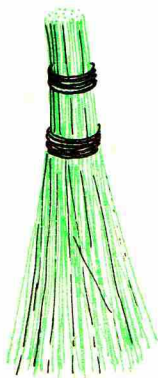


4. Jak brzmi zaprzeczenie zdania (wyrażającego pewien pogląd o pracy redakcji Delty):
 Nikt tu nigdy niczego niepotrzebnie nie robi.
 A co jest zaprzeczeniem zdania:
 C nie jest całkowicie zawarte w K?

Laser — układ kooperatywny

Mgr Stanisław KRYSZEWSKI



Obiektami zainteresowania wielu współczesnych gałęzi nauki są układy makroskopowe, składające się z bardzo wielu podukładów. Oto kilka przykładów: laser, molekuly wchodzące w reakcje chemiczne, ludzie tworzący grupy społeczne, warstwy geologiczne uczestniczące w ruchach górotwórczych, zwierzęta różnych gatunków zamieszkujące określone środowisko ekologiczne. Matematyczny model takich układów jest skomplikowany, bo do ich opisu potrzeba bardzo wielu zmiennych, reprezentujących poszczególne podukłady. Opis taki musi uwzględniać zarówno wpływ środowiska na każdy z podukładów jak i ich indywidualne własności. Okazuje się, że równania opisujące zjawiska przebiegające w takich układach mają podobną strukturę matematyczną, co jest wynikiem tego, że ich zachowanie jest jakościowo podobne. Kiedy na przykład parametry zewnętrzne przyjmują określone wartości (najczęściej małe), wówczas wpływ środowiska (środowisko jednego podukładu tworzą pozostałe podukłady) jest nieznaczący, a podukłady zachowują się niezależnie — chaotycznie. Przy pewnych wartościach parametrów układ staje się jednak niestabilny i wystarczy niewielka ich zmiana, żeby nastąpiła dramatyczna zmiana zachowania, a czasami struktury przestrzennej układu. Podukłady zaczynają współdziałać, zachowywać się w sposób uporządkowany — kooperatywny. Aby lepiej zrozumieć te zjawiska, prześledzimy je na przykładzie lasera.

Zasadniczym elementem lasera jest rura wypełniona gazem i zamknięta z obu stron zwierciadłami. Aby laser zaczął działać, musi być pompowany tzn. atomy gazu muszą być oświetlane silną lampą, dzięki czemu ulegają wzbudzeniu. W wyniku przemieszczania się ładunku pod wpływem pola fali pompującej, w atomie wytwarza się oscylujący w czasie, elektryczny moment dipolowy. Oscylujący dipol z jednej strony promieniuje fale elektromagnetyczne (światło), a z drugiej oddziałuje z polem elektromagnetycznym znajdującym się w rurze. Wzbudzone elektrony po pewnym (bardzo krótkim) czasie przechodzą do stanu podstawowego, emitując światło, które z kolei może oddziaływać z następnymi atomami.

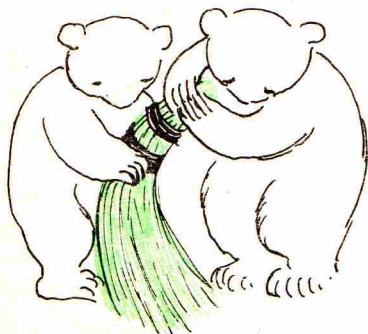
Należy podkreślić, że naszkicowane tutaj rozwiązania mają charakter przybliżony, ponieważ nasz opis nie uwzględnia tych cech układu, które można opisać jedynie na gruncie mechaniki kwantowej.

Na podstawie przedstawionego wyżej obrazu można ułożyć równanie opisujące prędkość zmian natężenia pola elektrycznego w rurze lasera:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} E(t) = -\kappa E(t) + GE(t) + \sum_n g_n p_n(t) E(t) + F(t),$$

gdzie $\kappa > 0$.

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania uwzględnia straty wynikłe z obecności otoczenia, np. przy odbiciu światła od luster. Drugi — jest to przyrost wywołany pompowaniem, którego siłę reprezentuje stała G . Trzeci wyraz opisuje zmiany pola wywołane drganiami (wymuszonymi przez to samo pole) elementarnych dipoli; g_n jest stałą proporcjonalną do ładunku elektronu; $p_n(t)$ to elektryczny moment dipolowy atomu, a n numeruje poszczególne atomy. Ostatni wyraz $F(t)$ opisuje fluktuacje, przypadkowe zmiany wynikłe z losowych zdarzeń, np. wahania natężenia światła lampy pompującej.



5. Wielomian stopnia 3 ma zawsze pierwiastek. Na przykład jeżeli $a > b > 1$ oraz

$$f(x) = x^3 + ax + b,$$

to przy $x < -a$ wartość $f(x)$ jest ujemna, zaś dla $x > 0$ mamy $f(x) > 0$. „Gdzieś po drodze” musi więc być $f(x) = 0$.

Ten dowód można wzmocnić. Podstawiamy za x tylko wartości wymierne; niech a, b będą takie. Dostatecznie daleko na lewo $f(x) < 0$, dostatecznie daleko na prawo $f(x) > 0$, a zatem gdzieś w środku $f(x) = 0$. Dowolny wielomian trzeciego stopnia ma pierwiastek wymierny? Oczywiście, że nie! Sprawdź np. $f(x) = x^3 + 3x + 2$.

Jaką własność bezprawnie przypisaliśmy liczbom wymiernym w tym oszukany dowodzie?

Atomowe momenty dipolowe także podlegają zmianom. Z jednej strony drgania dipola zanikają, a z drugiej pole elektryczne wzbudza atomy wymuszając drgania dipoli. A zatem dla n -tego atomu równanie opisujące oba te procesy ma postać:

$$(2) \quad \frac{d}{dt} p_n(t) = -\gamma p_n(t) + h_n E(t) D_n(t),$$

gdzie $\gamma > 0$ jest stałą charakteryzującą prędkość zaniku drgań atomowego dipola; h_n opisuje „siłę”, z jaką pole o jednostkowym natężeniu wymusza drgania dipola. Wyjaśnienia wymaga wielkość $D_n(t)$ zwana inwersją obsadzeń. Jest to różnica prawdopodobieństw tego, że atom jest w stanie wzbudzonym i tego, że jest w stanie podstawowym. Atom w stanie wzbudzonym ma większy moment dipolowy (wymuszony przez pole $E(t)$), niż w stanie podstawowym i dlatego we wzorze pojawia się dodatkowo inwersja obsadzeń.

Zupełnie analogiczne rozumowanie doprowadzi nas do trzeciego równania — dla inwersji obsadzeń w n -tym atomie

$$(3) \quad \frac{d}{dt} D_n(t) = \Gamma [D_n^{(0)} - D_n(t)] + H_n E(t) p_n(t) \quad (\Gamma > 0),$$

gdzie sens współczynników jest podobny do tych z równania (2). Jedyna różnica polega na pojawieniu się dodatkowego wyrazu $\Gamma D_n^{(0)}$, w którym $D_n^{(0)}$ jest inwersją obsadzeń powstałą w wyniku zewnętrznego pompowania.

Trzy równania (1)-(3) opisują procesy zachodzące w laserze. Tworzą one skomplikowany układ równań, ponieważ równania (2) i (3) trzeba zbudować dla wszystkich atomów, a liczba ich jest co najmniej rzędu 10^{15} . Niemożliwe jest zatem znalezienie dokładnych rozwiązań i trzeba sięgnąć po metody przybliżone. Pole $E(t)$ jest wielkością makroskopową, mierzona w doświadczeniu, podczas gdy $p_n(t)$ i $D_n(t)$ są wielkościami atomowymi. Procesy atomowe przebiegają bez porównania szybciej niż procesy makroskopowe. Można zatem przyjąć, że prędkości zaniku momentu dipolowego γ i inwersji obsadzeń Γ są znacznie większe niż κ — prędkość zaniku pola elektrycznego w rurze lasera. W czasie, gdy dipol elektryczny wykona bardzo wiele oscylacji (atom wielokrotnie ulegnie wzbudzeniu i przejściu do stanu podstawowego), pole $E(t)$ zmieni się nieznacznie. Jednocześnie pole $E(t)$ wymusza zmiany $p_n(t)$ i $D_n(t)$, które są znacznie wolniejsze niż odpowiednie prędkości zaniku. Dlatego w równaniach (2) i (3) możemy zaniedbać pochodne, co prowadzi do równań:

$$p_n(t) \approx \frac{1}{\gamma} h_n E(t) D_n(t),$$

$$D_n(t) \approx \frac{1}{\Gamma} H_n E(t) p_n(t) + D_n^{(0)}.$$

Łatwo stąd obliczyć, że

$$(4) \quad p_n(t) = D_n^{(0)} \left[1 - \frac{1}{\Gamma \gamma} h_n H_n E^2(t) \right]^{-1}.$$

Ponieważ, jak się okaże za chwilę, $E^2(t)$ jest wielkością małą, więc czynnik w równaniu (4) można zastąpić pierwszymi wyrazami jego rozwinięcia w szereg potęgowy

$$(5) \quad p_n(t) \approx D_n^{(0)} \left[1 + \frac{1}{\Gamma \gamma} h_n H_n E^2(t) \right].$$





Jeżeli rezultat ten podstawimy do równania (1), to otrzymamy

$$\frac{d}{dt} E(t) = (-\kappa + G)E(t) + \sum_n g_n D_n^{(0)} \left[1 + \frac{1}{\Gamma\gamma} h_n H_n E^2(t) \right] E(t) + F(t).$$

Grupując wyrazy z jednakowymi potęgami pola $E(t)$ możemy powyższe równanie zapisać w postaci:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} E(t) = (-\kappa + G')E(t) + CE^3(t) + F(t),$$

gdzie

$$G' = G + \sum_n g_n D_n^{(0)},$$

$$C = \frac{1}{\Gamma\gamma} \sum_n g_n D_n^{(0)} H_n h_n.$$

Należy tu zwrócić uwagę na następujący fakt. Otrzymaliśmy przybliżone równanie opisujące działanie lasera, zawierające tylko jedną nieznaną funkcję, a mianowicie natężenie $E(t)$ pola elektrycznego. Wyeliminowaliśmy tutaj skomplikowane procesy atomowe, które należałoby rozpatrywać w języku mechaniki kwantowej. Nasze przybliżenie można sformułować w następujący sposób: Zmiany drgań atomowych dipoli i inwersji obsadzeń są podporządkowane polu elektrycznemu. Pole elektryczne „steruje” ruchem wewnątrzatomowym.

Równanie (6) jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu — zawiera tylko pierwszą pochodną; nieliniowym — bo zawiera nieznaną funkcję w trzeciej potęgce. Dodatkowo występuje jeszcze człon $F(t)$ opisujący przypadkowe fluktuacje. Dyskusja rozwiązania ogólnego jest utrudniona ze względu na fluktuacyjny charakter $F(t)$. Omówimy wobec tego jedynie pewne własności rozwiązań tego równania. Interesują nas jedynie rozwiązania stabilne w czasie.

Jeżeli układ opisywany rozwiązaniem stabilnym wytrącimy ze stanu $E_s(t)$ tworząc nowy stan $E(t) = E_s(t) + \Delta E(t)$, to wówczas zaburzenie $\Delta E(t)$ zanika wraz z upływem czasu i układ powraca do stanu $E_s(t)$ — stabilnego. Rozważymy dwa przypadki.

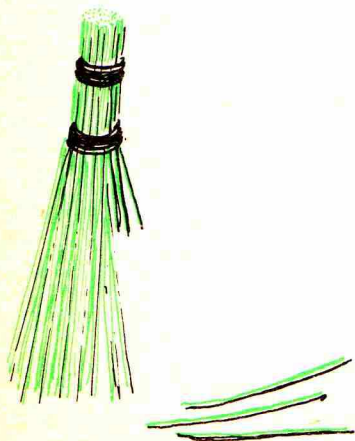
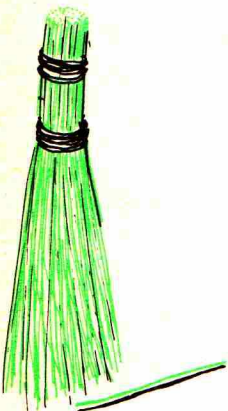
A) $\kappa > G'$.

Załóżmy na chwilę, że $F(t) = 0$. Jedynym rozwiązaniem stabilnym jest wówczas $E_s(t) = 0$. Gdy uwzględnimy fluktuacje, to wówczas laser działa jak lampka. Przypadkowe wzbudzenia atomów dają świecenie całości w sposób chaotyczny, nieuporządkowany czyli niespójny. Fizycznie oznacza to, że istniejące we wnętrzu niespójne pole $E(t)$ jest zbyt słabe, aby podporządkować sobie zmiany drgań dipoli atomowych i inwersji obsadzeń. Układ emituje wówczas bardzo krótkie (długości około kilkunastu metrów) ciągi falowe.

B) $G' > \kappa$.

Teraz mamy inną sytuację. Równanie (6) ma niezerowe rozwiązanie stabilne. Dzięki silnemu pompowaniu przewyższającemu straty pole $E(t)$ w sposób uporządkowany wymusza drgania dipoli atomowych. Atomy świecą w sposób uporządkowany dając wąską wiązkę promieniowania o wysokiej spójności. Ciągi falowe mogą mieć długości rzędu 300 000 km, czyli układ działa rzeczywiście jak laser. Pole $E(t)$ jest wystarczająco duże, aby wymusić drgania atomowych dipoli zgodne w fazie, co właśnie daje bardzo długie ciągi falowe. Makroskopowo ma ono nadal małą wartość, tyle, że rozwiązanie stabilne jest niezerowe.

Widzimy więc w tym przypadku pewien ogólny schemat. Układ złożony z bardzo wielkiej liczby podukładów, podczas zmiany zewnętrznego parametru, którym jest tutaj pompowanie (wielkość G') podlega gwałtownej i radykalnej zmianie. Jedną z wielkości charakteryzujących układ — pole elektryczne — $E(t)$ „podporządkowuje” sobie pozostałe wielkości, tym samym wymuszając zachowanie się całości w sposób makroskopowo spójny. Wyróżnienie $E(t)$ jako wielkości „porządkującej” pozwoliło nam ograniczyć liczbę zmiennych niezbędnych do opisanego układu do tylko jednej — właśnie $E(t)$. Oczywiście nasze rozważania miały charakter przybliżony, jednak pełna analiza zjawiska prowadzi do tych samych wniosków.



Bardzo podobny opis można stosować np. przy badaniu reakcji chemicznych. Przyjmijmy, że mamy dwa typy molekuł: a i b . Molekuły a powstają w wyniku reakcji autokatalitycznej, tj. reakcja przebiega tym prędzej, im więcej jest molekuł tego typu. Natomiast molekuły a rozpadają się (w reakcji autokatalitycznej) tworząc molekuły b tym prędzej, im więcej jest molekuł b . Prędkość zmian ilości molekuł a można więc przedstawić w postaci

$$\frac{d}{dt} a = \alpha_a a - ab.$$

Natomiast liczba rozpadających się molekuł b jest proporcjonalna do liczby tych molekuł. Załóżmy, że w reakcji produkcji molekuł b , biorą udział dwie molekuły a . Wtedy szybkość zmian liczby molekuł b

$$\frac{d}{dt} b = -\alpha_b b + a^2 \quad (\alpha_b > 0).$$

Przyjmijmy dalej, że molekuły a są znacznie bardziej trwale niż molekuły b , czyli $|\alpha_a| \ll \alpha_b$. Wtedy rozpad molekuł a jest powolny, tworzy się mało molekuł b .

Więc $\frac{db}{dt} \approx 0$ i można zaniedbać tę pochodną. Otrzymujemy zatem

$$\frac{d}{dt} a = \alpha_a a - \frac{1}{\alpha_b} a^3.$$

Jak widać równanie to ma podobną postać do równania lasera. Jego analiza przebiega tak samo. W zależności od znaku α_a mamy albo chaotyczne reakcje, albo też ściśle określony przyrost liczby molekuł a , a co za tym idzie i molekuł b . Liczba molekuł a odgrywa w tym przypadku rolę wielkości porządkującej. Reakcje chemiczne, których opis jest podobny do przedstawionego powyżej, są dosyć skomplikowane. Przykładem może być tzw. reakcja Biełousowa-Żabotyńskiego, w którą wchodzi związek cezu Ce. Związki zawierające jon Ce^{3+} reagują z inną prędkością niż związki zawierające jon Ce^{4+} . Przy określonych stężeniach reagentów obserwuje się rozdzielenie roztworu na warstwy niebieskie, zawierające głównie Ce^{4+} i czerwone, gdzie dominuje Ce^{3+} . Takie rozwarstwienie wskazuje na to, że w roztworze zachodzą procesy prowadzące do pojawienia się struktury makroskopowej typowej dla procesów kooperatywnych.

Podobne rozwiązania, aczkolwiek niekiedy znacznie bardziej złożone, można stosować do opisu układów, których wspólną cechą jest to, że przy pewnych warunkach zewnętrznych zachowują się chaotycznie i niespójnie. Natomiast w innych warunkach następuje bardzo silna korelacja podukładów tak, że zaczynają one „współpracować”, działać spójnie (koherentnie) i „kooperatywnie”. Istotną cechą takich układów, upraszczającą opis matematyczny jest to, że spośród na ogół bardzo wielu zmiennych, jedna (lub kilka) ma porządkującą, niejako nadrzędną charakter. Wymusza ona makroskopowo spójne działanie układu jako całości. Niekiedy nadaje ona nieuporządkowanemu, chaotycznemu przestrzennie układowi wyraźną strukturę przestrzenną, jak ma to np. miejsce w procesie magnesowania — powstawania makroskopowej magnetyzacji w układzie złożonym pierwotnie z wielkiej liczby chaotycznie zorientowanych elementarnych magnesów.

Bardzo ważne są dwie cechy opisu matematycznego układów kooperatywnych. Jedną z nich jest nieliniowość równań. Własnością rozwiązań równań nieliniowych jest to, że niewielkie zmiany parametrów prowadzą nieraz do gwałtownych zmian charakteru tych rozwiązań, co odpowiada gwałtownym zmianom własności układów fizycznych opisywanych przez te równania. Drugą ważną cechą są fluktuacje zawsze występujące w realnych układach fizycznych.

Nową gałęzią nauki, zajmującą się ogólną teorią układów, w których możliwe jest działanie kooperatywne jest synergetyka. Nazwa ta powstała z połączenia greckich słów „wspólne działanie”. Synergetyka zajmuje się więc opisem układów pozornie różnych, ale dających się opisać podobnym formalizmem matematycznym, a więc wykazujących jakościowe podobieństwo. Laser zaś tworzy jeden z najlepiej zbadanych układów wykazujących działanie kooperatywne. Stanowi on więc doskonały model ilustrujący główne zasady, kierunki poszukiwań i możliwości synergetyki. Na podstawie jego zachowań możliwe jest wyciąganie wniosków dotyczących innych układów opisywanych podobnymi równaniami.

