# Paradoks zegarów

Fizycy badając wzajemne położenie zjawisk w sposób naturalny zajmują się ich odległością w przestrzeni, jak też w czasie. Powstaje w związku z tym pytanie, jaka jest geometria używanej przez nich czasoprzestrzeni. Innymi słowy: gdy do współrzędnych przestrzennych dołączymy jeszcze jedną, musimy zdecydować, jak w otrzymanej przestrzeni bogatszej o jeden wymiar należy wprowadzić pojęcia geometryczne, np. prostopadłość.

Zasadniczo stosuje się trzy sposoby. Każdego z nich można użyć do przestrzeni o dowolnej geometrii, a więc teoretycznych czasoprzestrzeni jest trzy razy tyle, co przestrzeni.

Tu zajmiemy się dwuwymiarowymi czasoprzestrzeniami. A więc mamy prostą (geometrycznie) i czas. Prosta niech będzie taka, jak w geometrii Euklidesa. Używać będziemy normalnej terminologii, a więc dwuwymiarową czasoprzestrzeń nazwiemy po prostu płaszczyzną.

Każdy punkt płaszczyzny to „zdarzenie", które dla wybranego obserwatora (układu współrzędnych) zaszło w punkcie $x$ w chwili $t$. Drugi obserwator poruszający się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem pierwszego zakreśli w jego układzie współrzędnych prostą. Ta prosta to jednocześnie oś czasowa $t'$ układu współrzędnych, w którym drugi obserwator spoczywa. Kierunek osi $Ox'$ znajdujemy korzystając z definicji prostopadłości wektorów. Dwa wektory $[t_1, x_1]$, $[t_2, x_2]$ są prostopadłe jeśli:

w *geometrii Galileusza* $t_1 t_2 = 0$

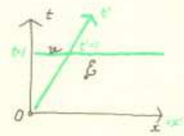
w *geometrii Minkowskiego* $t_1 t_2 - x_1 x_2 = 0$ (prędkość światła $c = 1$)

w *geometrii Euklidesa* $t_1 t_2 + x_1 x_2 = 0$.

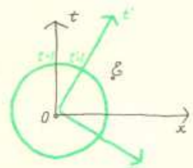
Tak więc w geometrii Galileusza $Ox'$ pokrywa się z osią $Ox$, zaś w geometrii Minkowskiego $Ox'$ to prosta położona symetrycznie do $Ot'$ względem prostych izotropowych. Nowe współrzędne „zdarzenia" możemy jednak określić dopiero po wyskalowaniu nowych osi. W tym celu konieczne jest znalezienie zbioru punktów odległych o jednostkę od początku układu współrzędnych. W pierwszym przypadku (odległość punktów $d = |t_1 - t_2|$) jest to prosta, w drugim $\left(d = \sqrt{(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2}\right)$ hiperbola, której asymptotami są proste izotropowe, a w trzecim okrąg jednostkowy.

Korzystając z rysunków zamieszczonych obok można teraz wyprowadzić wzory na nowe współrzędne

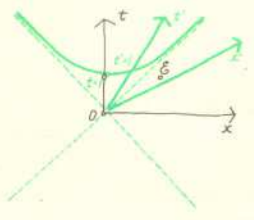
w geometrii Galileusza
$$t = t'$$
$$x' = x - \vartheta t,$$



w geometrii Minkowskiego
$$t' = t\cosh\alpha + x\sinh\alpha$$
$$x' = t\sinh\alpha + x\cosh\alpha,$$
gdzie $\vartheta = -\mathrm{tgh}\,\alpha$,



w geometrii Euklidesa
$$t' = t\cos\alpha - x\sin\alpha$$
$$x' = t\sin\alpha + x\cos\alpha,$$
gdzie $\vartheta = -\mathrm{tg}\,\alpha$.



Pierwsza z wymienionych geometrii opisuje kinematykę klasyczną ($\vartheta \ll c$), druga kinematykę relatywistyczną ($\vartheta$ dowolne), a trzeciej — tej, która opisuje czasoprzestrzeń taką, jak jej przestrzenna część, w fizyce nic nie odpowiada. Czas, jak się okazuje, to zupełnie inny wymiar niż wymiary przestrzenne.

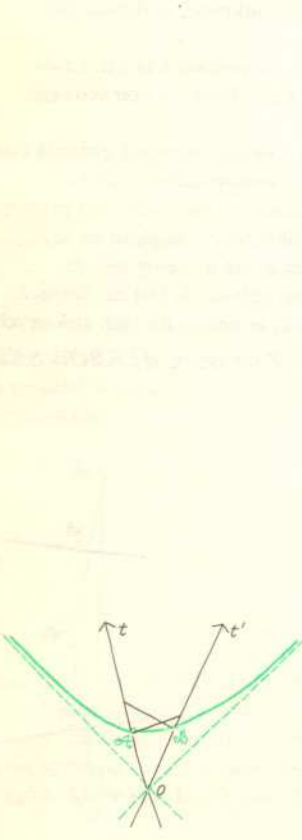
W geometrii Galileusza czas płynie tak samo dla wszystkich obserwatorów tj. zdarzenie $E$ ma we wszystkich układach tę samą wartość współrzędnej czasowej. W geometrii Minkowskiego już tak nie jest. Rozważmy bowiem dwóch obserwatorów $Ot$ i $Ot'$ i zdarzenie $A$. Dla pierwszego z nich $A$ zajdzie w czasie $t(A) = 1$ (jednostka czasu zegara spoczywającego w $Ot$). Rzutując $A$ prostopadle na oś $Ot'$ otrzymujemy

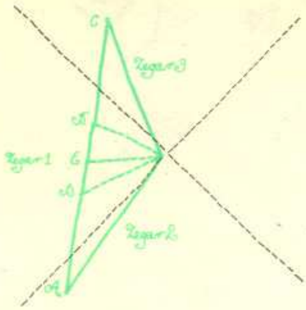
$$t'(A) > t(A),$$

Podobnie dla zdarzenia $B$ (zegar spoczywa w układzie $Ot'$)

$$t'(B) < t(B).$$

Czas w układzie $Ot$ biegnie dla obserwatora poruszającego się wolniej niż jego czas własny i odwrotnie zegar spoczywający w $Ot'$ biegnie w układzie $Ot$ wolniej niż zegar spoczywający w $Ot'$.





Ta symetria między obserwacjami w różnych inercjalnych układach odniesienia sugeruje paradoks, którego istotę wyjaśnia rysunek 3. Proste $AB$, $BC$ i $AC$ są liniami zegarów poruszających się bez przyspieszenia. Zegar 2 oddala się od zegara 1, a zegary 1 i 3 zbliżają się, by spotkać się w punkcie $C$. W punkcie $A$ synchronizowane są zegary 1 i 2, a w punkcie $B$ — zegary 2 i 3. W układzie spoczynkowym zegara 1 zegary 2 i 3 poruszają się. Powinno więc być

$$\tau_{AC} > \tau_{AB} + \tau_{BC},$$

gdzie przez $\tau$ oznaczyliśmy czasy własne zegarów. Paradoks polega na tym, że w układzie własnym zegarów 2 i 3 zegar 1 porusza się, co powinno dać

$$\tau_{AC} < \tau_{AB} + \tau_{BC}.$$

Żeby wyjaśnić ten paradoks musimy znaleźć na odcinku $AC$ zdarzenia równoczesne z $B$ dla obserwatorów 1 (punkt $E$), 2 (punkt $D$), 3 (punkt $D'$) i skorzystać z faktu, że w geometrii Minkowskiego odcinek łączący dwa zdarzenia $P$ i $S$ jest zawsze krótszy od różnicy współrzędnych czasowych w dowolnym inercjalnym układzie współrzędnych

$$\tau_{PS} \leqslant t_P - t_S.$$

Wtedy

$$\tau_{AC} = \tau_{AE} + \tau_{EC} = t_{1E} - t_{1A} + t_{1C} - t_{1E} = t_{1B} - t_{1A} + t_{1C} - t_{1B} > \tau_{AB} + \tau_{BC} > t_{2B} - t_{2A} + t_{3C} - t_{3B} = t_{2D} - t_{2A} + t_{3C} - t_{3D'} > \tau_{AD} + \tau_{D'C} = \tau_{AC} - \tau_{DD'}$$

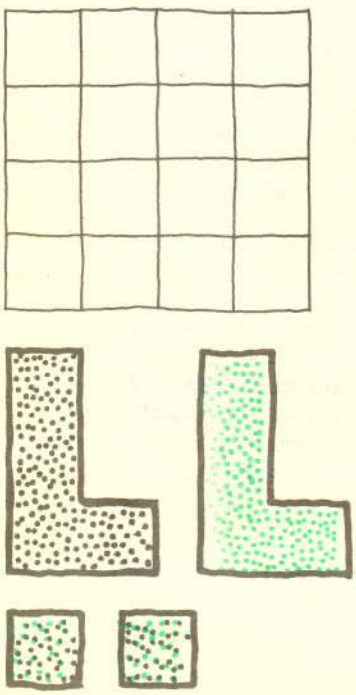
a więc $\tau_{DD'} > 0$ i nie ma już paradoksu. W punkcie $C$ zegar 1 wskaże większy czas niż czas wskazywany przez zegar 2. W powyższym rozumowaniu pominięto fakt, że w punkcie zwrotnym zegar porusza się z przyspieszeniem, co może mieć wpływ na jego bieg. Aby ocenić wpływ przyspieszenia $a$ na zegar trzeba porównać je z typowym przyspieszeniem „mechanizmu" zegarowego $b$. Niedokładność biegu zegara wywołana przyspieszeniem jest w przybliżeniu równa

$$\Delta t \simeq t \cdot \frac{a}{b} \simeq \frac{\Delta \vartheta}{b},$$

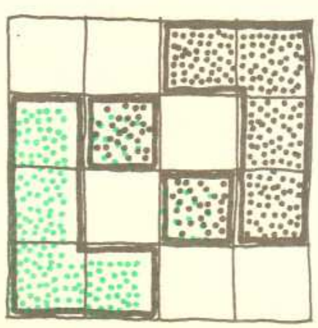
gdzie $t$ jest czasem trwania przyspieszenia.
Dla typowego zegara atomowego z okresem drgań $4 \cdot 10^{-11}$s niedokładność ta jest rzędu zaledwie $10^{-14}$s.
Różnica wskazań zegarów w punkcie $C$ zmieni się istotnie jeśli będą się one poruszały w polu grawitacyjnym. Uwzględnienie wywołanego obecnością mas „zakrzywienia" geometrii Minkowskiego prowadzi czasami do wyniku przeciwnego niż otrzymany powyżej. Jeśli na przykład jeden z bliźniaków pozostanie na orbicie Ziemi, a drugi poleci w rakiecie balistycznej do Plutona, a następnie wróci dzięki przyciąganiu Słońca, to okaże się, że podróżnik stanie się starszy od swojego brata. Widać stąd, że dopiero dokładne określenie warunków, w jakich odbywa się podróż, pozwala przewidzieć wynik porównania wskazań zegarów po powrocie.

## „ELKA"

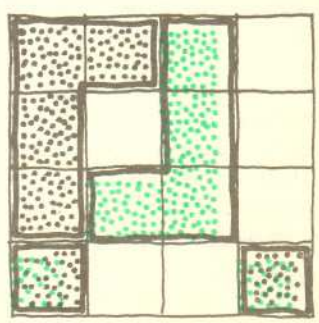
Na szachownicy 4×4 ułożone są dwie figury w kształcie litery L (3×2), oraz dwa kwadraty (1×1) zgodnie z tą szachownicą (a więc przykrywające całe pole). Jedna z „elek" należy do jednego z grających, a druga do drugiego; kwadraty są „neutralne". **Ruch** (który na przemian wykonują gracze) polega na ułożeniu swojej „elki" w **inny** sposób na niezajętych polach (można ją przy tym odwrócić „na lewą stronę"). **Po** wykonaniu ruchu gracz może jeszcze (przed ruchem przeciwnika) przenieść jeden lub dwa kwadraty na dowolne z niezajętych pól. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu. Czy gra jest zdeterminowana (a więc czy istnieje strategia zwycięska dla któregoś z graczy, a może strategia remisowa)?



Szachownica i pionki



W takiej pozycji zaczynamy grę



Jeśli kolej na „czarnego", to przegrał