

O loksodromie i odwzorowaniu Mercatora

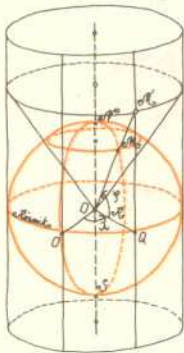
Dr Ryszard

S. KRUPIŃSKI

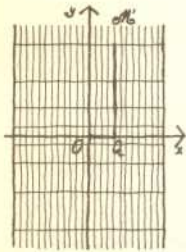
Navigare necesse est, vivere non est necesse
(Plutarch)

Zeglowanie jest koniecznością,
życie nią nie jest

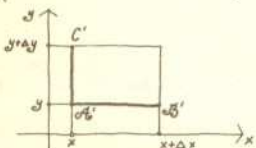
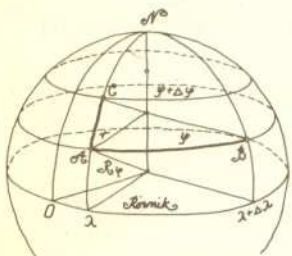
Dowód, że sfera nie jest rozwijalna na płaszczyźnie, można otrzymać ze słynnego *theorema egregium* Gaussa: przy izometriach wewnętrznych (nie zmieniających długości krzywych) krzywizna całkowita powierzchni nie zmienia się. Krzywizna całkowita powierzchni S w punkcie $x \in S$ to iloczyn najmniejszej i największej z krzywizn krzywych przechodzących na S przez punkt x . Płaszczyzna ma oczywiście zerową krzywiznę całkowitą, a sfera o promieniu R — krzywiznę R^{-2} .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

I. Odwzorowanie Mercatora

Mapy nawigacyjne stanowią, oprócz instrumentów nawigacyjnych (busola, sekstans, radar, log,...), podstawowe narzędzie pracy oficera nawigacyjnego podczas wachty. Instrumenty nawigacyjne przechodzą ciągłą ewolucję, od prostych busol do systemów radiolokacyjnych (Omega, Decca). Tymczasem mapy nawigacyjne przetrwały nieomal w swej pierwotnej formie prawie od czterech stuleci. Najczęściej statek porusza się po krzywej nazywanej loksodromą (opis poniżej), która ma kształt spiralny. Wykreślenie takiej krzywej na dowolnej mapie danego obszaru morskiego, w trudnych warunkach morskich (statek w ruchu) byłoby wręcz niewykonalne. Najlepiej by było, aby obrazem loksodromy na mapie była linia prosta, którą można najłatwiej wykreślić, jak również odczytać kąty między obrazem loksodromy a obrazami południków ziemskich. Z zadania skonstruowania takiej mapy wywiązał się, ze znakomitym rezultatem, w 1569 r. kartograf flamandzki G. Cremer nazywany Mercatorem.

Podany przez Mercatora sposób odwzorowania powierzchni kuli (sfery) na płaszczyźnie znalazł powszechne zastosowanie w kartografii nawigacyjnej, gdzie przetrwał po dzień dzisiejszy. Można wykazać, że sfera nie jest rozwijalna na płaszczyźnie. Nie można np. rozciąć nożyczkami papierowej sfery tak, aby otrzymać obszar płaski. Powierzchniami rozwijalnymi na płaszczyźnie są natomiast np. powierzchnia boczna walca lub stożka. Mercator zastosował pośredni sposób odwzorowania sfery na płaszczyźnie. Najpierw odwzorowuje się sferę na powierzchnię boczną walca, następnie powierzchnię walca na płaszczyznę. Załóżmy, dla uproszczenia, że Ziemia ma kształt kuli. Możemy opisać na Ziemi walec kołowy styczny do niej wzdłuż równika (patrz rys. 1). Każdemu punktowi M powierzchni Ziemi (poza biegunami) przyporządkowujemy punkt M' powierzchni walca, który jest punktem przecięcia powierzchni walca półprostą OM , gdzie O jest środkiem Ziemi. Tak określone odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne, tylko bieguny Ziemi nie mają obrazu. Obrazami równoleżników są okręgi, jako przekroje powierzchni bocznej walca powierzchniami stożków. Obrazami południków są tworzące (proste) powierzchni bocznej walca. Po rozcięciu powierzchni bocznej walca wzdłuż tworzącej będącej np. obrazem południka $\lambda = 180^\circ$ i rozwinięciu jej na płaszczyźnie otrzymujemy płaski obraz powierzchni Ziemi (bez biegunów). Obrazem płaskim powierzchni Ziemi jest więc pas płaszczyzny, obrazy południków tworzą pęk prostych równoległych do krawędzi pasa, a obrazy równoleżników — pęk odcinków prostopadłych do krawędzi pasa. Obierzmy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych tak, aby oś odciętych zawierała obraz równika, a oś rzędnych — obraz południka zerowego. Z rys. 1 odczytujemy wzajemnie jednoznaczność między współrzędnymi punktu $M'(x, y)$ na płaszczyźnie Oxy i współrzędnymi geograficznymi punktu $P(\varphi, \lambda)$ na powierzchni Ziemi (z wyłączeniem biegunów)

$$(1) \quad \begin{cases} x = R\lambda \\ y = R \operatorname{tg} \varphi \end{cases} \quad R \text{ — promień Ziemi.}$$

Odwzorowanie (1) nazywamy rzutem walcowym. Uogólnieniem (1) jest rzut walcowy normalny, w którym rzędna jest dowolną funkcją szerokości geograficznej:

$$(2) \quad \begin{cases} x = R\lambda \\ y = f(\varphi). \end{cases}$$

Z określenia rzutu walcowego wynika, że skala na osi Ox jest regularna, a na osi Oy — nieregularna (patrz rys. 2). W rzucie tym obraz ulega zniekształceniu zarówno w kierunku równoleżnikowym jak i południkowym. Wyznamy funkcję $y = f(\varphi)$ taką, żeby obydwa zniekształcenia były równe.

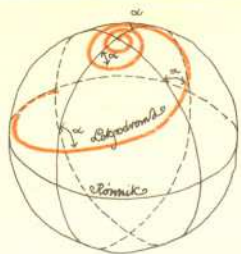
Niech będą dane na powierzchni Ziemi punkty $A(\varphi, \lambda)$, $B(\varphi, \lambda + \Delta\lambda)$ oraz $C(\varphi + \Delta\varphi, \lambda)$ gdzie $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ — dowolne, niezerowe przyrosty szerokości i długości geograficznych (patrz rys. 3). Obrazami punktów w rzucie (2) są punkty $A'(x, y)$, $B'(x + \Delta x, y)$ i $C'(x, y + \Delta y)$, gdzie Δx , Δy — różne od zera przyrosty zmiennych x i y , ponadto $\Delta x = R \cdot \Delta\lambda$.

Granicę g_1 stosunku długości odcinka $A'B'$ do długości łuku \widehat{AB} , przy $\Delta\lambda \rightarrow 0$, nazywamy zniekształceniem równoleżnikowym, natomiast granicę g_2 stosunku długości odcinka $A'C'$ do długości łuku \widehat{AC} , przy $\Delta\varphi \rightarrow 0$ nazywamy zniekształceniem południkowym w punkcie A w rzucie (2), (patrz rys. 3):

$$g_1 = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{|A'B'|}{|\widehat{AB}|} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{R \cdot \Delta\lambda} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$g_2 = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{|A'C'|}{|\widehat{AC}|} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta\varphi} = \frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi}.$$

Warunek $g_1 = g_2$ oznacza, że w odwzorowaniu (2) nie ulegają zmianie kąty (tzn. kąty między krzywymi na sferze równają się kątom między rzutami krzywych na płaszczyźnie). Takie odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem walcowym normalnym równokątnym (wiernokątnym) lub odwzorowaniem walcowym (rzutem) Mercatora.



Rys. 4

Z równości $g_1 = g_2$ wynika równanie różniczkowe

$$\frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

którego rozwiązaniem ogólnym jest funkcja

$$y = R \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| + C.$$

Ponieważ $-45^\circ < \frac{\varphi}{2} < 45^\circ$, więc $-\infty < \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) < +\infty$, a tym samym

$$y = R \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + C.$$

Ponieważ dla $\varphi = 0$ mamy $y = 0$, więc stała całkowania C równa jest 0. Wykazaliśmy, że między współrzędnymi punktów $M'(x, y)$ i $M(\varphi, \lambda)$ w rzucie Mercatora zachodzą związki:

$$(3) \quad \begin{cases} x = R \cdot \lambda \\ y = R \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right). \end{cases}$$

II. Loksodroma

Loksodromą (z greck.: $\lambda\omicron\xi\omicron\varsigma$ „krzywy” + $\delta\rho\omicron\mu\omicron\varsigma$ „bieg”) nazywamy krzywą na powierzchni Ziemi, która przecina każdy południk pod danym, ustalonym kątem skierowanym α ($\alpha \in \langle 0; 360^\circ \rangle$). W nawigacji kąt ten nazywany jest kątem drogi lub azymutem loksodromy. Nazwa „loksodroma” została wprowadzona przez uczonego holenderskiego Snelliusa w 1624 r. Loksodroma ma kształt przestrzennej „spirali logarytmicznej” zbieżnej asymptotycznie do biegunów (patrz rys. 4). Pokażemy, że obrazem loksodromy w rzucie Mercatora jest linia prosta. Dowód: Na rys. 5 przedstawione są obrazy południków λ i $\lambda + \Delta\lambda$, obrazy równoleżników o szerokościach geograficznych φ i $\varphi + \Delta\varphi$ oraz element Δl łuku loksodromy, przecinającej południki pod kątem α .

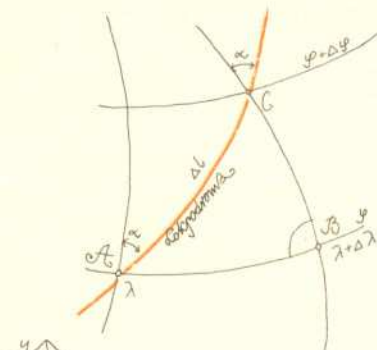
Z zależności między elementami trójkąta $A'B'C'$ wynika, że $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{ctg} \alpha$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha, \text{ czyli } \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Rozwiązaniem otrzymanego równania różniczkowego w przedziale $\langle x_1, x \rangle$ jest funkcja liniowa

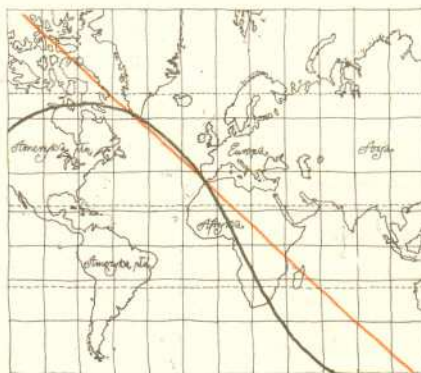
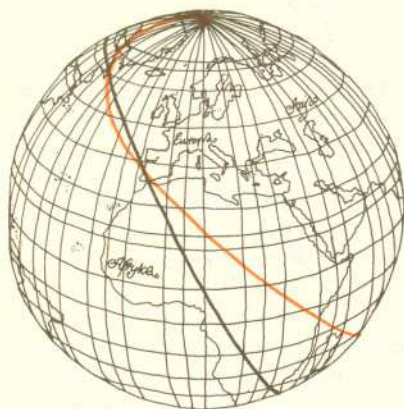
$$y = \operatorname{ctg} \alpha \cdot (x - x_1) + y_1,$$

której wykresem jest prosta tworząca z dodatnim kierunkiem osi Ox kąt $90^\circ - \alpha$.



Rys. 5

W każdym rzucie walcowym normalnym obrazem loksodromy będzie linia prosta lub odcinek. Linia prosta jest bowiem jedyną krzywą przecinającą pęk prostych równoległych pod stałym kątem.

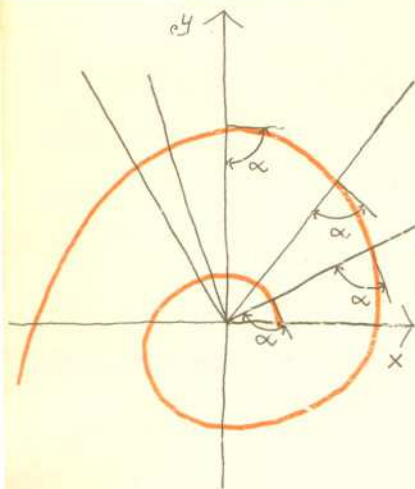


O loksodromie pisaliśmy np. w numerze 1/1980; porównanie loksodromy z ortodromą (łukiem koła wielkiego na sferze) zawiera np. „Kalejdoskop Matematyczny” Hugona Steinhausa, skąd reprodukowujemy powyższe dwa rysunki.

Wyprowadzimy wzór na tangens kąta drogi po loksodromie wyznaczonej przez dwa punkty $A(\varphi_1, \lambda_1)$ i $C(\varphi_2, \lambda_2)$. Niech $A'(x_1, y_1)$ i $C'(x_2, y_2)$ będą rzutami punktów A, C . Z rys. 5 odczytujemy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, gdzie α — stały kurs statku.

Współrzędne punktów A' i C' otrzymujemy ze wzoru (3). Po podstawieniu współrzędnych x_1, x_2, y_1, y_2 do ostatniej równości dostajemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \left(\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \right)}.$$



Rys. 6

Niech będzie dana kula styczna w punkcie O do płaszczyzny. Punkt N kulki przeciwnieległy punktowi O możemy nazwać biegunem. Każdemu punktowi P płaszczyzny możemy przyporządkować punkt P' powierzchni kuli, w którym półprosta NP przecina tę kulę. Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne we wszystkich punktach poza biegunem, któremu nie jest przyporządkowany żaden punkt płaszczyzny. Opisane przyporządkowanie nazywamy rzutem stereograficznym.

A oto zadania dla Czytelnika

1. Wyprowadzić równanie różniczkowe loxodromy $l = l(\varphi)$.

2. Wykazać, że pochodna długości łuku loxodromy wyraża się wzorem $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{R}{\cos \alpha}$,

(α — kąt kursu, R — promień sfery).

3. Wyprowadzić wzór na długość łuku loxodromy od szerokości geograficznej φ_1 do φ_2 biegnącej pod kątem α względem południków.

Odp: $l = \frac{R}{\cos \alpha} (\varphi_2 - \varphi_1)$.

4. Wykazać, że loxodroma przecina każdy południk nieskończenie wiele razy, zawsze na innej szerokości geograficznej.

5. Wykazać, że rzutem stereograficznym loxodromy jest spirala logarytmiczna (rys. 6).

6. Obliczyć odległość loxodromiczną pomiędzy Warszawą a Nowym Jorkiem. Porównać ją z długością łuku koła wielkiego łączącego te miasta.

Patrz w niebo

Nauka rozwija się bardzo szybko. W zeszłym miesiącu opisaliśmy pewną nowo odkrytą gwiazdę i zakończyliśmy stwierdzeniem, że właściwie nie wiadomo, jak ten obiekt sklasyfikować. To było w zeszłym miesiącu. Dzisiaj wiemy dużo więcej, a w momencie pojawienia się tej „Delty” w kioskach nasza wiedza o nowo odkrytej gwiazdce zostanie najprawdopodobniej posunięta jeszcze dużo dalej. Spróbujemy dzisiaj zaklasyfikować tę gwiazdę i pod tym pretekstem zapoznamy Czytelników z podstawami podziału gwiazd na różne klasy. Najogólniej dzielimy gwiazdy na zmienne i stałe. Nasza gwiazdka jest zmienna. Wszystkie zmienne gwiazdy można podzielić na zmienne „fizycznie” (kiedy autentycznie zmienia się z czasem strumień promieniowania emitowanego przez gwiazdę) i „optycznie” (kiedy zmienność spowodowana jest przez zmiany geometrii, np. zaćmienia, rotacja niejednorodnej gwiazdy itd.). Nasza gwiazda jest zmienną fizyczną. Oczywiście istnieją układy, gdzie występują oba rodzaje zmian. Gwiazdy fizycznie zmienne można ogólnie podzielić na zmienne kataklizmiczne (gdzie procesy wybuchowe określają zachowanie się systemu) i „inne” (pulsujące, powoli niestabilne itd). Zmienne kataklizmiczne dzielimy na parę klas, które wreszcie coś nam mówią. Są to supernowe, nowe i „inne-prim” (oczywiście jest to nazwa wymyślona przeze mnie tylko dla celów tego artykułu). Nasza gwiazdka nie jest supernową ani klasyczną nową, bo amplituda zmian jasności tych dwóch klas w czasie wybuchu wynosi co najmniej 1000 (milion w przypadku supernowych). Nasza gwiazda wpada do trzeciego koszyka. Najprawdopodobniej wszystkie nowe i „inne-prim” są zbudowane podobnie: jest to zawsze system podwójny, w którego skład wchodzi czerwona gwiazda ciągu głównego, a drugi składnik jest białym karłem. Wybuchy są konsekwencją przepływu materii z czerwonej gwiazdy w okolice białego karła.

Zachowanie gwiazd trzeciego koszyka jest zdeterminowane przez istnienie lub nieistnienie pola magnetycznego wokół zdegenerowanego karła. Obiekty mające silne pole magnetyczne nazywają się „polarami” z trzech powodów: a) światło przez nie emitowane jest spolaryzowane, b) duże znaczenie mają w nich obszary biegunów magnetycznych białego karła (po angielsku — polar caps) i c) w uznaniu dużego wkładu Polaków przy badaniu tych gwiazd.

Nasza gwiazdka nie ma najprawdopodobniej silnego pola magnetycznego. Podobne obiekty można podzielić na dwie grupy: nowe karłowate i układy nowopodobne.

W tych ostatnich nie ma wybuchów, nawet niedużych, ale gwiazdy zachowują się cały czas pod wieloma względami jak gwiazdy nowe między wybuchami.

Nasza gwiazdka ma wybuchy i to dość często, mniej więcej co 2 tygodnie, więc jest nową karłowatą. Ale na tym nie koniec. Nowe karłowate można znowu podzielić na co najmniej 3 klasy, jednak są one już tak jednorodne, że wystarczy podać nazwę typowego przedstawiciela, aby określić daną klasę. A więc gwiazdy typu Z Camelopardalis są to nowe karłowate, które czasami po wybuchu nie uspokajają się zupełnie, a pozostają „zawieszane” jakby przez pewien czas w stanie „pośrednim”. Nie znamy przyczyny tego zjawiska.

Inna klasa, gwiazd typu SU Ursae Maioris, charakteryzuje się tym, że gwiazdy wchodzące w jej skład mają dwa rodzaje wybuchów: normalne i tzw. supermaksima, kiedy wybuch jest potężniejszy i trwa dłużej. Wreszcie u gwiazd trzeciej klasy, typu U Geminorum w krzywych blasku nie występują powyższe zjawiska. U naszej gwiazdy również nie odkryto dotychczas żadnych poważnych odstępstw od mniej więcej regularnych wybuchów. A więc według stanu wiedzy na dzisiaj klasyfikujemy ją jako gwiazdę typu U Gem.

Klasyfikację tę i podziały na podgrupy można ciągnąć dalej. Po narysowaniu odpowiedniego drzewka zobaczycie, że staje się ona bardziej skomplikowana, niż biologiczna klasyfikacja stworzeń żywych. I nic dziwnego, bo gwiazd jest dużo więcej niż istot żyjących na Ziemi.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Rozwiązanie zadania F 106.

Błędny wniosek wynika z połowicznego uwzględnienia efektów polaryzacji dielektryka. W rozumowaniu wzięto pod uwagę obecność ładunków polaryzacyjnych na granicach: ciała obdarzone ładunkami — dielektryk (osłabienie oddziaływania przenoszonych ładunków w dielektryku), pominięto natomiast istnienie ładunków polaryzacyjnych na granicy ośrodków. Postępowanie takie bywa usprawiedliwione, gdy dielektryk można potraktować jako ośrodek nieskończony, w danym przypadku wiedzie jednak do mylnej konkluzji, iż praca sił zewnętrznych podczas pionowego przenoszenia ładunków jest zerowa. W rzeczywistości, praca włożona w trakcie wynurzenia ładunków jest większa niż uzyskana podczas zanurzenia. Dla uzmysłowienia sobie tego faktu zauważmy, że lokalna gęstość ładunków polaryzacyjnych rośnie wraz ze wzrostem składowej normalnej natężenia pola w pobliżu granicy ośrodków. Zbliżenie ładunków o przeciwnych znakach zmniejsza wartość tej składowej, zmniejszając się więc musi wypadkowa siła wciągająca ładunek do wnętrza dielektryka.