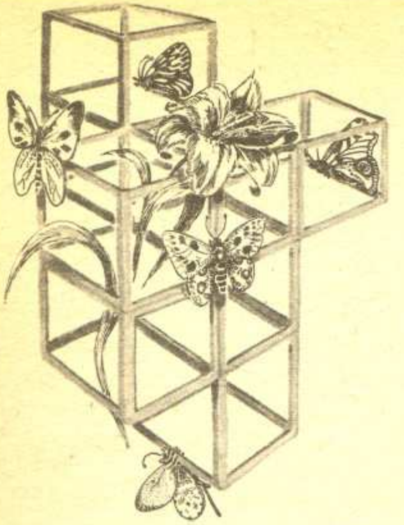
Jak najprościej



Doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Fizyka wzięła się z obserwacji świata, obserwacji jednak dość szczególnej. Interesujące są w niej jedynie najprostsze, choć możliwie ogólne aspekty przyrody. Najprostsze tzn. dające się opisać za pomocą minimalnej ilości pojęć (parametrów), jednoznacznie zdefiniowanych poprzez podanie operacyjnego (doświadczalnego) sposobu ich ustalania (pomiaru parametrów). Nic nie stoi na przeszkodzie, by pojęcia te przyjąć następnie za własności przyrody (np. masa, ładunek, przyspieszenie ciał). Na każdym etapie rozwoju fizyki podstawowym problemem było więc znalezienie możliwie niewielu, możliwie powszechnych własności przyrody. Każde też istotne uproszczenie na tej drodze prowadziło do powstania zupełnie nowej gałęzi fizyki (mechanika klasyczna, elektrodynamika, teoria względności, mechanika kwantowa).

Wbudowana raz na zawsze do fizyki możliwość obiektywnego (za pomocą przyrządów) pomiaru wartości pojęć podstawowych umożliwiła znalezienie liczbowych związków między nimi — praw przyrody. Oczywiście im prostsza i ogólniejsza była myśl pierwotna, tym lepsze i bardziej powszechne odpowiednie prawo. Tak powstałe prawa nie mogą więc być znikąd wyprowadzone ani w żaden sposób udowodnione. Przykładem są tu zasady dynamiki Newtona. Warto jednak zwrócić uwagę, że przy tak ustalonej metodologii zawsze odkryjemy jakieś prawo, choć przeważnie bardzo szczegółowe i mało interesujące. Budowana w ten sposób teoria zawsze zgadza się z doświadczeniem. Pod warunkiem, że nie opuścimy terenu operacyjnie zdefiniowanych wybranych pojęć pierwotnych. Przy okazji uzyskujemy jednak możność wykonywania wszelkich dozwolonych operacji rachunkowych na uzyskanych zależnościach liczbowych. Ta dodatkowa, dedukcyjna już działalność jest nadprogramową zaletą fizyki. W wyniku takiej właśnie działalności powstała np. zasada zachowania energii, którą można wyprowadzić z zasad dynamiki.

Po tym co powiedzieliśmy mogłoby się wydawać, że kryterium prostoty teorii nie musi prócz aspektu estetycznego, mieć zbyt istotnego znaczenia. Wystarczy przecież ogólność, którą uzyskać można znacznie mniejszym wysiłkiem. A jednak, prostota dobrych teorii fizycznych jest ważniejszą chyba ich własnością niż powszechność. Jedną z przyczyn tego jest wspomniany, wcale nie bagatelny, dedukcyjny aspekt fizyki. Tylko proste funkcje i proste równania są wszechstronnie i elegancko zbadane przez matematyków. W rezultacie eleganckie i nietrywialne prawa dedukcyjne możemy uzyskać jedynie w prostych teoriach fizycznych. Prócz różnych zasad zachowania do tej kategorii należą też prawa elektrodynamiki Maxwella wyprowadzone z prostych praw indukcji Faradaya. Bez tego wyprowadzenia „nie mielibyśmy" fal radiowych — obiektów nieco absurdalnych z punktu widzenia mechaniki newtonowskiej.

W fizyce konieczna jest jednak również działalność dedukcyjna innego rodzaju. Działalność, która już w sposób rzeczywisty i nietrywialny podlega weryfikacji doświadczalnej. Z owych wybranych, nielicznych własności przyrody chcemy przecież wyprowadzić jak najwięcej własności dodatkowych. Z punktów materialnych musimy złożyć bryły sztywne i niesztywne, ciecze i gazy, zaś z zasad dynamiki wyprowadzić prawa rządzące tymi wszystkimi formami materii. To się daje zrobić jedynie dla bardzo prostych i bardzo ogólnych teorii. Inaczej, znów z powodów natury matematycznej, jest to po prostu praca niewykonalna. I tak trzeba uciekać się do wielu przybliżeń i bardzo często zadowalać się dowodami niesprzeczności teorii podstawowych z wtórnymi dla nich własnościami przyrody. Nikt przecież nie jest w stanie wyprowadzić własności wody w stawie z własności kwarków i elektronów. Chociaż twierdzimy, że woda rzeczywiście składa się z tych cząstek.

I tu dochodzimy do jeszcze jednego przeważnie przemilczanego kryterium prostoty teorii. Podstawowe równania (prawa) dobrej teorii fizycznej muszą mieć fizycznie realizowalne ścisłe rozwiązania. Bez dokładnych rozwiązań nie moglibyśmy nawet zacząć żadnych rozsądnych rachunków przybliżonych, koniecznych do pokazania rzeczywistej niesprzeczności teorii i jej powszechnej zgodności z doświadczeniem.

Spróbujmy teraz opisać kilka ogólnych cech tak budowanych teorii fizycznych.

Rozwiązanie zadania **M 293**. Narysujmy krzywe zamknięte otaczające każdy z podejrzanych kłębków *A*, *B*, *C*, *D* i policzmy, ile razy sznurek przecina każdą z krzywych: *a* — 9 razy, *b* — 15 razy, *c* — 12 razy i *d* — 16 razy. Wynika stąd, że każda z krzywych *a* i *b* rozcina płaszczyznę na dwa obszary tak, że w każdym z tych obszarów leży jeden koniec sznurka. Tak więc końców należy szukać w kłębkach *A* i *B*.

TROCHĘ HISTORII

Pierwsza rzucająca się w oczy ogólna własność przyrody to ruch. Przynajmniej tak uznali fizycy przed wiekami. Najprostszy ruch to taki, w którym wszystkie fragmenty ciała poruszają się po torach równoległych. Wtedy do opisu wystarczy wybrać jeden punkt ciała. Dochodzimy do pojęcia punktu materialnego. Decydujemy się w ten sposób na wyróżnienie u wszystkich ciał cech bycia gdzieś i kiedyś i abstrahowanie od wszystkich innych. Przy okazji wprowadziliśmy continuum czasoprzestrzenne — zbiór wszystkich *gdzieś* i *kiedyś*. Najprostsze i oczywiste o nim założenie sprowadza się do przyjęcia wspólnego continuum dla wszystkich zjawisk. Oraz do

przyj [illegible] jest płaskie. To, plus zasada względności (wyprowadzalna z zasad Newtona) nieuchronnie i bezlitośnie prowadzi nas do teorii względności Einsteina pod warunkiem, że zapomnimy o grawitacji. Jej dodanie zmusza nas do pokrzywienia czasoprzestrzeni.
Tyle o kinematyce. A co z siłami — przyczyną pojawiania się ruchów. Najprostsza, to siła odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od źródła siły (siła grawitacji, siła Coulomba). Dlaczego taka dziwna? Dlatego, że strumień takiej właśnie siły przez powierzchnię zamkniętą nie zależy od kształtu tej powierzchni. Prócz kierunku siły (od lub do jednego punktu) ważny tu jest fakt, że powierzchnia kuli ($4\pi r^2$) rośnie ze wzrostem promienia tak samo szybko, jak maleje siła ($1/r^2$). Tak jest oczywiście tylko w przestrzeni euklidesowej. W tym też przypadku równania dynamiki Newtona mają dla sił typu $1/r^2$ ścisłe rozwiązania. Geometryczna prostota takich sił rozciąga się zresztą na całą fizykę i dlatego nawet przy opisie oddziaływań cząstek elementarnych cały wysiłek skierowany jest na budowę teorii posługujących się tylko siłami $1/r^2$. Wierzymy przecież, że przyroda rzeczywiście jest prosta. Wracając do mechaniki zwróćmy uwagę na to, że prócz koniecznej operacji wyjaśniania własności materii przez złożenie jej z punktów materialnych (wydaje się cudem, że to tak pięknie działa), oczywisty jest też kierunek działań odwrotny. A mianowicie ,,doświadczalna konstrukcja" samego punktu. Czyli drobienie materii na kawałki. W ten sposób, wciąż pod sztandarem prostoty, pojawiają się cząsteczki chemiczne, atomy, elektrony, protony, neutrony i kwarki. Konieczne przy tym dzielenie fal elektromagnetycznych (z coraz mniejszym obiektem oddziałuje coraz mniejszy fragment fali) prowadzi prostą drogą do fotonów. To kierunek nieuchronny, jeśli na każdym szczeblu poznania chcemy działać prosto i powszechnie. Nie dziwmy się więc, że dostaliśmy wreszcie obiekty zbyt subtelne dla naszych aparatów pomiarowych. Teoria (mechanika kwantowa) stale jest prosta. Tylko strasznie dużo pojawiło się cząstek.

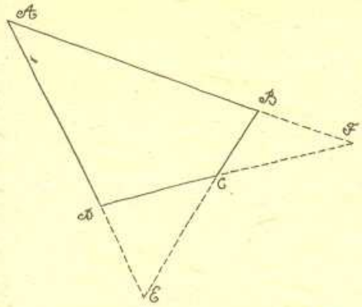
ANALOGIE

Niewiele równań ma ścisłe rozwiązania. Dlatego też tak dużo zjawisk fizycznych na wszystkich szczeblach poznania opisuje się przy pomocy takich samych modeli. Jak coś się porusza, to albo cząstka (zbiór cząstek) albo fala. Fala akustyczna, fala na wodzie, fala elektromagnetyczna, plazmowa, spinowa a nawet prawdopodobieństwa. Z ich drobienia powstają zresztą odpowiednie cząstki: fonony, fotony, plazmony, magnony, wreszcie 300 cząstek elementarnych.
Wahadło drga tak samo jak sprężyna, a także jak prąd w obwodzie złożonym z cewki i kondensatora, jak cząsteczki w ciele stałym i tak dalej. Zresztą, zbiór takich oscylatorków to nic innego, jak ciało sprężyste. Ciało konieczne do tego, by rozchodziła się fala. Kółko się zamknęło. Wynika z tego, że próżnia jest ośrodkiem sprężystym i składa się z oscylatorków (niedrgających!). W próżni bowiem rozchodzą się fale elektromagnetyczne. I rzeczywiście, próżnia zachowuje się w zjawiskach elektrycznych, jak zwykły dielektryk.

JEDNOLITE TEORIE

Z tego samego powodu (mało prostych równań) w fizyce występuje dość automatyczna tendencja do tworzenia teorii jednolitych, do zlepiania kilku teorii w jedną, ogólniejszą. Wspólne równanie nie znaczy, że zjawisko jest takie samo (powszechny błąd wielu popularyzatorów fizyki). Zawsze jednak jakieś wspólne własności fizyczne występują. I tak działanie proporcjonalne do przyczyny (np. siła proporcjonalna do wychylenia — znów prosta siła) to nic innego tylko małe odstępstwo od położenia równowagi, siła $1/r^2$ to zawsze działanie poprzez próżnię wywołane pewnym polem itd. Pożądana ze względów natury estetycznej tendencja do budowania ogólnych teorii jest więc niejako ułatwiana przez to, że teorie są proste, czyli podobne, a więc o pewnych wspólnych cechach fizycznych. Trzeba tylko umieć tę istotną wspólnotę zauważyć.
Oddziaływanie magnesów jest zupełnie niepodobne do oddziaływania ładunków. Odpowiednie pola są jednak bardzo podobne geometrycznie. Zwrócenie uwagi na coś tak nieuchwytnego jak pola, doprowadziło Faradaya do praw indukcji elektromagnetycznej.
Na zakończenie pytanie. Dlaczego budowana zgodnie z regułami gry współczesna teoria cząstek oparta na kwantowej teorii pola nie jest zbyt elegancka choćby z racji operowania tak dużą liczbą cząstek. Otóż chyba dlatego, że kwantowa teoria pola jako jedyna i pierwsza teoria fizyczna nie ma w ogóle rozwiązań ścisłych. Można z niej uzyskać pewne ogólne ścisłe stwierdzenia w rodzaju istnienia antycząstek, ale żadnej dokładnej liczby. Jest to ważna wada teorii. Przecież zarówno praktyczne (techniczne), jak i cywilizacyjne (poznawcze) sukcesy fizyki były oparte na wyjątkowej prostocie świata proponowanego przez fizyków.
Każdy widzi różnicę między znaczeniem stwierdzenia, że prawo grawitacji Newtona opisuje ruchy wszystkich ciał niebieskich, a stwierdzenia, że elektrodynamika kwantowa zgadza się z danymi doświadczalnymi z dokładnością do ośmiu cyfr znaczących. Różnicę być może nawet cywilizacyjną...

Zadania, których nie umiemy rozwiązać IV



Niech czworokąt wypukły $ABCD$ nie będzie trapezem (rysunek). Wówczas każdy z odcinków AC, BD, EF nazywać będziemy przekątną tego czworokąta. Tym razem nie umiemy wpisać w dany okrąg czworokąta, mając dane długości wszystkich trzech jego przekątnych.

PROOF

Martin Gardner i matematyka popularna

W styczniu 1982 roku, po 25 latach pracy w redakcji *Scientific American*, przeszedł na emeryturę Martin Gardner, redaktor kolumny „Gry matematyczne" tego miesięcznika. Kolumna nie była poświęcona dosłownie grom, a była po prostu popularnym kącikiem matematycznym w czasopiśmie. Warto zwrócić uwagę na postać Gardnera i jego działalność, która przyniosła mu sławę jednego z najbardziej popularnych matematyków na świecie. Matematyków? Ze zdumieniem się dowiedziałem dopiero teraz, że Martin Gardner nie jest matematykiem — w każdym razie w sensie administracyjno-biurokratycznym. Nie skończył żadnych studiów matematycznych (nawet, o zgrozo, zaocznych) ani kursów kwalifikacyjnych. Jest absolwentem wydziału filozoficznego uniwersytetu w Chicago. Pracował najpierw jako dziennikarz w jednej z lokalnych gazet w stanie Oklahoma, następnie w w *Humpty Dumpty Magazine* — rozrywkowym tygodniku o poziomie, oględnie mówiąc, niskim. Zajmował się tam głównie działem zagadek, którego znaczną część stanowiły geometryczne problemy składania kartki papieru. Jeden z przyjaciół pokazał mu kiedyś ciekawy sposób otrzymywania sześciokątów przez składanie taśmy papierowej. Zainteresowała się tym redakcja *Scientific American* i skłoniła Gardnera do krótkiego artykuliku o tym. Ktoś w redakcji wpadł na pomysł: „Załóżmy sobie stały kącik matematyczny", Gardner był pod ręką i jemu to zaproponowano prowadzenie działu. W ten prawdziwie amerykański sposób Gardner dostał do ręki szansę, której nie zmarnował. Sprzyjała mu także sytuacja ogólna: szok, wywołany radzieckim sputnikiem spowodował znaczne zwiększenie nakładów na naukę w krajach zachodnich i na fali ogólnego zainteresowania trochę wypłynął i sam Gardner.

Jego pierwsze artykuły były niezwykle proste. „Gdy zaczynałem redagować swoją kolumnę, nie miałem w domu ani jednej książki matematycznej" — wspomina, „ale na szczęście słyszałem o kilku". Pisywał później i o rzeczach bardziej skomplikowanych, nigdy nie wykraczając wiele poza poziom drugiego roku college'u, gdyż — jak przyznaje — właściwie tylko tyle zna matematyki. Ale to właśnie uważał za swoją zaletę. „Nad każdym artykułem muszę się bardzo napracować, abym sam jasno rozumiał jego treść". Matematykę przedstawiał trochę jako grę, trochę jak sztukę, trochę jak naukę.

Rzadko zdarza się, aby wybitny uczony nie potrafił przystępnie opowiedzieć o swojej dyscyplinie naukowej. Po prostu nie stałby się wybitnym, gdyby tego nie umiał. Czy można jednak popularyzować tak hermetyczną naukę, jaką jest matematyka, nie będąc samemu matematykiem?

Tylko skąd pomysł, że Gardner nie jest matematykiem? Czy tylko dlatego, że brak mu odpowiedniego papierka — dyplomu? Miał dużo kontaktów z czytelnikami, to pomaga. No cóż, Ameryka jest rozległym krajem, *Scientific American* pięknie wydawanym czasopismem, a amerykański kult dobrej roboty powoduje, że artykuły są prawdziwe, ciekawie napisane i starannie opracowane. W wielu kręgach społeczeństwa amerykańskiego jest „dobrze widziane" prenumerowanie tego miesięcznika. Nie wiem, czy Czytelnicy mi uwierzą, ale w Europie Środkowej jest taki kraj, w którym zaprenumerowanie gazety jest niemożliwe — jako zbyt skomplikowane organizacyjnie, nieopłacalne i dezorganizujące pracę ofiarnych urzędników. Słowo daję, że jest taki kraj. To nie dowcip na prima aprilis! *Scientific American* ma kredowy papier, efektowne zdjęcia, wyraźną czcionkę, ale i znakomitych autorów. Powtórnie opracowane artykuły Gardnera, po weryfikacji i przemyśleniach autora i uwagach czytelników ukazują się w starannie wydanych książkach. W iście amerykańskim stylu *Scientific American* sprzedaje dobry towar w efektownym opakowaniu.

Nie wszyscy sądzą, że matematykę można i warto popularyzować. Na pewno trzeba to robić umiejętnie. To prawda, że wszystko trzeba tak robić. Matematyka jest jednak szczególnie wrażliwa na (posłużmy się Szwejkowym określeniem) bałwanienie do kwadratu. Łatwo wpaść w tandetne ciekawostki lub górnolotne brednie. A te luźne uwagi o popularyzacji zakończę cytatem z *Newsweek'a* (23.XI.1981): „Cierpi on (Gardner) widząc ludzi zafascynowanych rozmaitymi bzdurami, a cierpi dlatego, że wie jak wiele zdumiewających prawdziwych faktów jest na świecie".

Andrzej SAWICKI

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 292. Wykazać, że układ równań

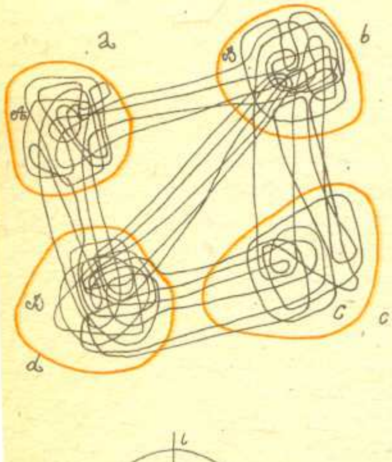
$$\frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}x_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,$$

gdzie współczynniki $a_{11}, \ldots, a_{44}$ są całkowite, ma jedyne rozwiązanie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Rozwiązanie na str. 13



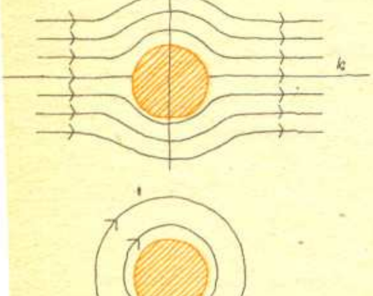
M 293. Gdzie należy szukać końców tego splątanego sznurka?

Rozwiązanie na str. 14

M 294. Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 1. Wykazać, że $S_n = \sum \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}$, gdzie sumujemy po wszystkich parach liczb całkowitych p, q takich, że $0 < p < q \leq n$, $p+q > n$, p i q są względnie pierwsze.

$$\left(S_2 = \frac{1}{1\cdot 2},\ S_3 = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3},\ S_4 = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}\ \text{itd.}\right)$$

Rozwiązanie na str. 6



Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 112. Idealna (tj. nieściśliwa i nielepka) ciecz opływa nieskończony walec. Na rysunkach przedstawione są linie prądu w dwóch przypadkach: (a) gdy w dużej odległości od walca ciecz ma prędkość niezależną od położenia oraz (b), gdy w dużej odległości ciecz porusza się po okręgach. Pokazać, korzystając z symetrii problemu, że w obu przypadkach siła działająca na walec ze strony cieczy jest równa zeru. Jaka jest ta siła dla prędkości cieczy będącej sumą prędkości dla (a) i dla (b)?

Rozwiązanie na str. 12