



serval - neofelis serval.

O punktach libracji i podkowiastych orbitach

Dr Tomasz KWAST

Jednym z największych działów mechaniki nieba, nauki zajmującej się ruchami ciał niebieskich, jest tzw. problem trzech ciał. Zainteresowanie nim było chyba logicznym następstwem uprzedniego rozwiązania zagadnienia dwóch ciał. Mianowicie, skoro Kepler w 1619 r. sformułował ostatnie ze swoich praw ruchu planet, a Newton w 1687 znalazł dla nich uzasadnienie w postaci prawa grawitacji, to naturalną rzeczą było zająć się z kolei zagadnieniem trzech ciał. Brzmi to dość banalnie, jednak, jak pokazano później, w ogólnej postaci zagadnienie to jest nierozwiązalne, tzn. nie można podać w analitycznej postaci rozwiązań równań ruchu trzech ciał działających każde na każde siłami grawitacji. Można było jedynie pokusić się o poszukiwanie rozwiązań w jakichś szczególnych przypadkach. Pierwsze takie rozwiązania szczególne tego problemu znalazł Lagrange w 1772 r. Pokazał on, że możliwy jest taki ruch trzech ciał, gdy albo leżą one stale na linii prostej, albo gdy leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Z upływem czasu konfiguracja tych trzech mas obraca się zmieniając jedynie rozmiary, a nie zmieniając proporcji, z czego wynika, że orbity wszystkich trzech ciał są krzywymi (stożkowymi) podobnymi, leżą we wspólnej płaszczyźnie i mają wspólne ognisko w środku masy.

Jak widzimy, nazwa „rozwiązanie szczególne” jest tu jak najbardziej trafna i w potocznym jej znaczeniu. Konfiguracje takie są jedynie ciekawostką matematyczną, zaś ich realizacja w przyrodzie praktycznie niemożliwa. Za to ogromne zastosowanie ma pewien szczególny przypadek zagadnienia trzech ciał, znany w literaturze jako tzw. problem ograniczony. To z kolei brzmi o tyle nieprzyjemnie, że sugeruje znowu jakąś abstrakcyjność zagadnienia. Tak źle jednak nie jest i problem ten przy całym swoim „ograniczeniu” jest dostatecznie obszerny, ciekawy i związany z przyrodą, aby liczni autorzy poświęcali mu całe monografie. Polega on na badaniu ruchu ciała o bardzo małej masie w polu grawitacyjnym dwóch innych mas umownie „ciężkich”, przy czym z góry zakłada się, że te dwie masy obiegają się po orbicie kołowej. Trzecie ciało ma z założenia masę tak małą, że nie wpływa na ruch dwóch ciężkich — nazywane bywa w związku z tym „znikomy”.

Rozwiązanie Lagrange'a nie zakłada żadnych warunków na masy trzech ciał, może zatem dotyczyć również problemu ograniczonego. Wynika z tego, że w płaszczyźnie orbity mas ciężkich M i m istnieje pięć punktów L_1, \dots, L_5 (zwanych punktami libracji lub punktami Lagrange'a), w których dwa przyspieszenia grawitacyjne pochodzące od mas ciężkich i jedno odśrodkowe znoszą się (początek układu jest tu umieszczony w środku masy, a całość obraca się w kierunku zaznaczonym strzałką z prędkością kątową $\omega = \sqrt{G(M+m)/R^3}$, gdzie G jest stałą grawitacji, a R odległością mas ciężkich). Trzy z nich leżą na prostej przechodzącej przez masy ciężkie i jest intuicyjnie dość oczywiste, że w ogóle muszą istnieć, aczkolwiek nie jest łatwo podać formuły określające ich dokładne położenie. Mniej oczywiste jest, że zerowanie się wypadkowego przyspieszenia zachodzi też w punktach L_4 i L_5 , będących wierzchołkami trójkąta równobocznego rozpiętego na odcinku R . Za to bardzo łatwo można ten fakt sprawdzić. Otóż przyspieszenie ze strony M wynosi

$$a_1 = \left[-\frac{GM}{R^2} \cos \frac{\pi}{3}, -\frac{GM}{R^2} \sin \frac{\pi}{3} \right] = \frac{GM}{R^2} \left[-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

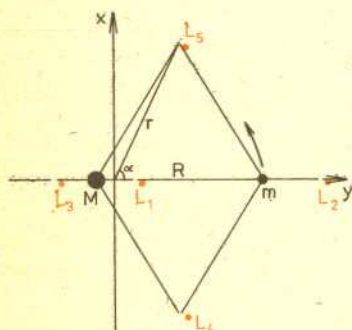
ze strony m

$$a_2 = \left[\frac{Gm}{R^2} \cos \frac{\pi}{3}, -\frac{Gm}{R^2} \sin \frac{\pi}{3} \right] = \frac{Gm}{R^2} \left[\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

a przyspieszenie odśrodkowe w odległości r od środka masy układu (czyli od osi obrotu) jest

$$a_{odśr} = [\omega^2 r \cos \alpha, \omega^2 r \sin \alpha] = \frac{G}{R^2} \left[\frac{1}{2} (M-m), \frac{\sqrt{3}}{2} (M+m) \right].$$

Natychmiast widzimy, że suma tych trzech przyspieszeń jest równa zeru.



Usytuowanie punktów libracji L_1, \dots, L_5 w układzie dwóch mas M i m obiegających się po kole. Początek układu współrzędnych jest w środku masy.



Rozwiązanie zadania M 301

Oznaczmy przez Z_l zamek, w którym król spędził l -tą noc i przypuśćmy, że nie powrócił do swej siedziby do 363 dnia. Znajdzie się wtedy zamek, w którym król spędził 4 nieparzyste noce, a więc co najmniej 2 razy przybył do niego tą samą drogą. Niech więc $Z_{2k} = Z_{2l}$ i $Z_{2k-1} = Z_{2l-1}$ ($k < l$). Łatwo zauważyć, że wynika stąd, iż $Z_{2k-2} = Z_{2l-2}, \dots, Z_0 = Z_{2l-2k}$. Ale Z_0 był zamkiem królewskim i wobec tego król odwiedził swój zamek w dniu $2l - 2k$ wbrew założeniu. Tak więc król wrócił do swojej siedziby, nim minął rok.

Oczywiście, niewielkie znaczenie przyrodnicze ma fakt, że jakiś drobny obiekt umieszczony w punkcie libracji będzie tam przebywał dowolnie długo, gdyż jest to sytuacja przyrodniczo nierealna. Praktyczne znaczenie może mieć znajomość ruchu drobnych ciał w pobliżu punktów libracji, a w tym celu trzeba, niestety, po prostu efektywnie rozwiązywać równania ruchu. Ma się rozumieć, nie będziemy tu tego robić, warto może tylko zdać sobie sprawę, że na oko nie są one strasznie skomplikowane. W układzie współrzędnych jak na rysunku, a więc wirującym ze stałą prędkością kątową ω , mają one postać

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \omega^2x - GM \frac{x-x_1}{r_1^3} - Gm \frac{x-x_2}{r_2^3},$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \omega^2y - GM \frac{y}{r_1^3} - Gm \frac{y}{r_2^3},$$

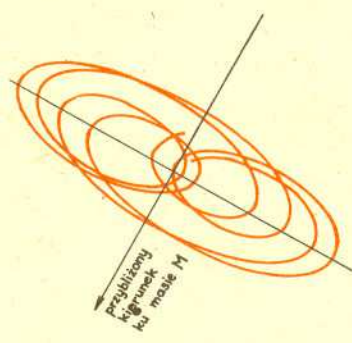
gdzie $x_1 = -\frac{m}{M+m}R$ jest współrzędną masy M , $x_2 = \frac{M}{M+m}R$ — współrzędną masy m , a r_1 i r_2 oznaczają odległości ciała znikomego odpowiednio od M i m . Pominęliśmy tu jako nieinteresujące równanie w trzeciej współrzędnej prostopadłej do płaszczyzny orbity mas M i m .

Rozwiązywać te równania można na dwa sposoby: albo stosując dodatkowe upraszczające założenia próbować rozwiązywać je analitycznie, albo w postaci ścisłej rozwiązywać je numerycznie. Pierwsze podejście daje się zastosować, gdy prawe strony równań zlinearyzuje się, tzn. rozłoży w szereg potęgowy w pobliżu punktów libracji i zachowa tylko wyrazy z pierwszymi potęgami x i y . Taki układ równań różniczkowych liniowych jest rozwiązalny do końca. Wnioski w skrócie są następujące.

Bez względu na stosunek mas M i m ruch w bliskim otoczeniu punktów liniowych L_1, L_2 i L_3 jest złożeniem okresowego i systematycznego. Składnik okresowy reprezentuje sobą ruch po elipsie, a systematyczny dowodzi, że rozmiary elipsy nieustannie rosną. W wyniku tego ciało znikome puszczone w jakikolwiek sposób w ruch przy punkcie liniowym L_1, L_2 czy L_3 wcześniej czy później oddali się od niego dowolnie daleko.

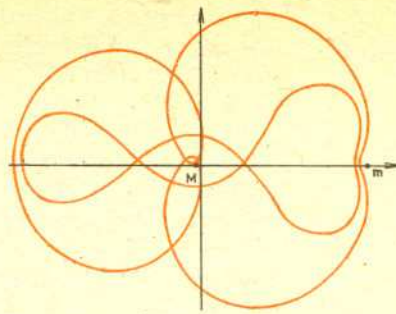
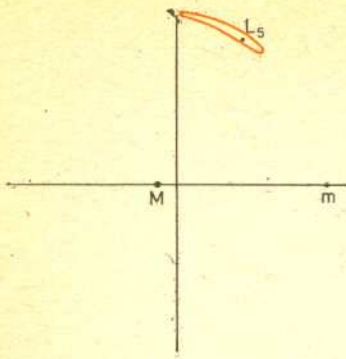
Inaczej ma się rzecz z punktami trójkątnymi L_4 i L_5 . Tu na ogół ruch ciała znikomego jest podobny jak przy punktach liniowych, ale jeżeli $m/(M+m) < 0,0385$, to ruch jest złożeniem dwóch ruchów okresowych z różnymi częstościami, ale też po elipsach i nie ma składnika systematycznego. Oznacza to, że ciało znikome puszczone przy L_4 czy L_5 w odpowiedni sposób, może wokół danego punktu libracji wykonywać drgania dowolnie długo, jakby przyćwiczone na sprężynie do punktu, w którym nic nie ma! Inaczej mówiąc punkty trójkątne są w liniowym przybliżeniu stabilne, o ile kontrast mas ciężkich jest dostatecznie duży.

Nie zapominajmy właśnie o zastrzeżeniu, że „w liniowym przybliżeniu”. Twierdzenie o absolutnej stabilności punktów trójkątnych byłoby zbyt pochopne, gdyż dalsze wyrazy szeregów, na jakie rozwija się prawe strony równań ruchu, mają prawo stabilność popsuć. Za to na pewno niestabilne są punkty liniowe, skoro są niestabilne już w przybliżeniu liniowym. Subtelniejsze badania tych zagadnień możliwe są właściwie już tylko poprzez numeryczne rozwiązywanie ścisłych równań ruchu, na co można sobie obecnie pozwolić dzięki maszynom cyfrowym. Okazuje się, że przy spełnieniu określonych warunków początkowych ciało znikome może poruszać się po najrozmaitszych, nieraz mocno osobliwych orbitach okresowych, a w szczególności po orbitach otaczających jeden lub nawet oba punkty trójkątne! Dopuszczalne są zatem orbity o kształcie podkowy — rzecz jasna — względem wirującego układu współrzędnych.



Przykładowa orbita ciała znikomego w małym otoczeniu trójkątnego punktu libracji L_5 będąca rozwiązaniem zlinearyzowanego układu równań ruchu.

Wszystkie te rozważania byłyby jedynie ciekawymi ćwiczeniami umysłowymi, gdyby nie ich piękne zastosowanie w przyrodzie. Okazuje się bowiem, że Wszechświat zrealizował punkty libracji oraz stabilne ruchy wokół nich.



Dwa przykłady możliwych orbit okresowych ciała znikomego w układzie ciężkich mas M i m będące rozwiązaniami ścisłych równań ruchu.

Rozważmy mianowicie układ dwóch mas: Słońce ($M = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg) i największą planetę Układu Słonecznego, Jowisza ($m = 1,899 \cdot 10^{27}$ kg). Orbita Jowisza jest w dobrym przybliżeniu kołowa (jej mimośród $e = 0,0478$), zatem układ tych dwóch mas spełnia założenia ograniczonego problemu trzech ciał, w dodatku ze stabilnymi orbitami przy punktach trójkątnych. Tym trzecim ciałem może być dowolna planetoida lub inny okruch materii, byle tylko dał się zaobserwować z Ziemi. Otóż w 1906 r. Max Wolf, astronom obserwatorium w Heidelbergu, odkrył w pobliżu punktu L_5 układu Słońce-Jowisz planetoidę, którą nazwano Achillesem (numer katalogowy 588).

Z biegiem czasu okazało się, że planetoida ta przebywa stale w pobliżu punktu L_5 , a ponadto odkryto szereg nowych ciał zarówno tu, jak i przy L_4 . Wszystkie nazwano imionami bohaterów wojny trojańskiej. Nie został zrealizowany pierwotny pomysł nazywania jednej grupy imionami Trojan, a drugiej imionami Greków. Wprawdzie przy L_4 (za Jowiszem) mamy większość Trojan, a przy L_5 (przed Jowiszem) większość Greków, ale brak konsekwencji w nadawaniu nazw doprowadził do pomieszania obu walczących stron. I tak przy L_4 są m.in. Patroklos (617), Anchizes (1173), Troilos (1208), Eneasza (1172), Priam (884), zaś przy L_5 oprócz Achilleusa są Diomedes (1437), Hektor (624), Menelaos (1647), Odyszeusz (1143), Antilochos (1538), Nestor (659), Agamemnon (911), Ajaks (1404) i inni. Wszystkie te planetoidy najczęściej nazywane są trojańskimi.

Drugi przykład realizacji punktów libracji znany dopiero od bardzo niedawna. Mianowicie wszystko wskazuje na to, że niektóre z małych satelitów Saturna odkrytych przez sondy Voyager, przebywają w pobliżu trójkątnych punktów libracji układu składającego się z Saturna oraz innego, większego jego satelity. I tak przy obu trójkątnych punktach związanych z Tethys (satelita nr 3) znaleziono co najmniej po jednym satelicie, których prowizoryczne nazwy są 1980S13 i 1980S25. Na razie tylko jednego „trojańczyka”, 1980S6, znaleziono w punkcie trójkątnym związanym z Dione (satelita nr 4), ale opracowywanie obserwacji wykonanych przez Voyagery jeszcze trwa i lista znanych w ogóle satelitów Saturna może być uzupełniona.

Nie znamy obecnie żadnego konkretnego obiektu, który przewędrowałby z L_4 do L_5 lub odwrotnie, aczkolwiek ruch taki, jak powiedzieliśmy, jest możliwy. Nie wiemy w ogóle, jak konkretnie doszło do schwywania kilkudziesięciu ciał przez punkty L_4 i L_5 , tak jak cały problem powstania Układu Słonecznego jest daleki od rozwiązania. Wiadomo, że drobne ciało przylatujące z nieskończoności może w pobliżu punktu libracji zwolnić lub nawet wielokrotnie go okrążyć, a następnie odlecieć znowu do nieskończoności. Schwywanie może nastąpić dopiero w wyniku działania innych mas (np. innych planet w przypadku planetoid trojańskich lub innych satelitów Saturna, jak w drugim przykładzie), ale mogą one również spowodować wytrącenie ciała znikomego z okresowej orbity. Przedstawiony tu model nie jest w stanie opisać tych wszystkich złożonych zjawisk, ale nie wymagajmy od niego zbyt wiele — on i tak doskonale tłumaczy podstawowe fakty obserwacyjne.

Przykłady okresowych orbit ciała znikomego obejmujących jeden lub oba trójkątne punkty libracji. Pierwszy z tych rysunków, gdzie M oznaczałoby Słońce, a m — Jowisza, można uważać za ilustrację rzeczywistego ruchu znanych obecnie planetoid trojańskich.