kot domowy - felis domestica.

Parabola, gwiazdki i bilard

1. W artykule na stronach 6 i 7 autor „nię zachęca" do rachunkowego wykazania, że wszystkie okręgi opisane na trójkątach utworzonych przez trzy styczne do paraboli przechodzą przez jej ognisko. A oto te rachunki.

Wszystkie parabole są podobne, a nasze zadanie należy do geometrii podobieństw. Możemy więc rozpatrzyć pewną szczególną parabolę, np. $2y = x^2$, której ogniskiem jest punkt $P = (0, 1)$ (rys. 1 artykułu „Łatwe zadanie o paraboli"). Styczne w punktach o rzędnych a, b, c mają współczynniki kierunkowe równe wartościom pochodnej funkcji $y = \frac{x^2}{2}$, czyli a, b, c.

Równaniami tych stycznych są zatem odpowiednio $y = ax - \frac{a^2}{2}$, $y = bx - \frac{b^2}{2}$, $y = cx - \frac{c^2}{2}$.

Punkty przecięcia A, B, C tych stycznych wyznaczamy z łatwego układu równań i wychodzi
$A = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab}{2}\right)$, $B = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{bc}{2}\right)$, $C = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{ac}{2}\right)$.

Szukamy okręgu przechodzącego przez te punkty; poszukajmy jego równania:

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2.$$

Podstawiamy za x, y kolejno współrzędne punktów A, B, C:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (a+b)p + p^2 + \frac{a^2b^2}{4} - abq + q^2 - r^2 = 0$$

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - (b+c)p + p^2 + \frac{b^2c^2}{4} - bcq + q^2 - r^2 = 0$$

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - (a+c)p + p^2 + \frac{a^2c^2}{4} - acq + q^2 - r^2 = 0.$$

Odejmujemy np. drugie i trzecie równanie od pierwszego

$$\frac{(a+b)^2-(b+c)^2}{4} - (a-c)p + \frac{a^2b^2-b^2c^2}{4} - (ab-bc)q = 0$$

$$\frac{(a+b)^2-(a+c)^2}{4} - (b-c)p + \frac{a^2b^2-a^2c^2}{4} - (ab-ac)q = 0,$$

skąd po zrozumiałych rachunkach obliczamy w końcu p i q, a z ktoregokolwiek z poprzednich trzech równań bez trudu wyznaczamy r. W wyniku tych obliczeń okazuje się, że równaniem poszukiwanego okręgu jest

$$\left(x - \frac{a+b+c-abc}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{ab+bc+ac+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+$$
$$+a^2c^2+a^2b^2c^2+1).$$

Jak wykazać, że każdy z tych okręgów przechodzi przez ognisko $P = (0, 1)$ naszej paraboli? A oto zadanie, którego nie umiemy rozwiązać: dla pewnej krzywej C (gładkiej, ograniczającej obszar wypukły) wszystkie okręgi opisane na trójkątach utworzonych przez trzy styczne do niej przechodzą przez pewien wspólny punkt. Czy krzywa C jest parabolą?

2. Rachunki nie były bardzo uciążliwe, choć trudno by było przekonać kogokolwiek, że to lepszy dowód rozważanego twierdzenia o paraboli. Więcej nadziei można by wiązać z szybkimi obliczeniami za pomocą liczb zespolonych; przepisujemy je ze zbioru zadań z *American Mathematical Monthly* (wyd. New York 1957, przekład rosyjski Moskwa 1977; zad. 85). Pominiemy kilka łatwych do sprawdzenia szczegółów.
Pierwszy z nich to zespolone przedstawienie paraboli. Jeżeli liczba zespolona t „biega" po okręgu $|t| = 1$, to punkt $z = 1/(1-t)^2$ opisuje parabolę o ognisku $z = 0$. Przedstawienie parametryczne stycznej do niej $z_1 = z(t_1)$ to

$$z = 1/(1-t_1)(1-t)$$

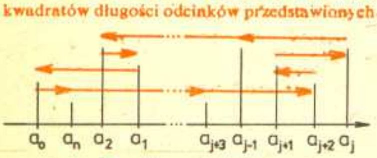
i dwie styczne, przechodzące przez punkty $z_1 = z(t_1)$ i $z_2 = z(t_2)$ przecinają się w $z_{12} = 1/(1-t_1)(1-t_2)$. Jeśli uświadomimy sobie, że $z = t \cdot const$ jest przedstawieniem parametrycznym okręgu, to natychmiast napiszemy przedstawienie parametryczne okręgu przechodzącego przez z_{12}, z_{23} i z_{31}

$$z = \frac{1-t}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)},$$

a ten okrąg przechodzi (podstawić $t = 1$) przez ognisko $z = 0$, koniec rachunków. Możemy, kontynuując je, otrzymać np. Wnioski 1 i 2 z artykułu „Łatwe zadanie o paraboli".

Rozwiązanie zadania M 303

Zaznaczając punkty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ na osi liczbowej możemy zinterpretować S jako sumę kwadratów długości odcinków przedstawionych



na rysunku. Zauważmy, że jeżeli $1 < i < n$, to jeden z odcinków musi zawierać przedział (a_{i-1}, a_{i+1}). Wynika stąd łatwo, że oznaczając $d_i = a_i - a_{i-1}$ mamy

$$S \geq 2d_1^2 + 2d_2^2 + \ldots + 2d_n^2 + 2d_1d_2 + \ldots$$
$$\ldots + 2d_{n-1}d_n.$$

Równocześnie dla uporządkowania

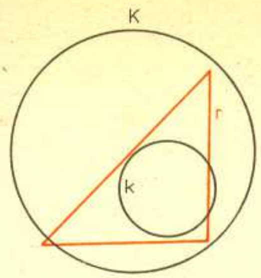
$$(a_0', \ldots, a_n') = \begin{cases} (a_0, a_2, \ldots, a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \ldots, a_1) & \text{dla } n = 2k \\ (a_0, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n-2}, \ldots, a_1) & \text{dla } n = 2k+1 \end{cases}$$

mamy $S = 2d_1^2 + 2d_2^2 + \ldots + 2d_n^2 + 2d_1d_2 + \ldots + 2d_{n-1}d_n$, czyli poszukiwane minimum.

3. Zamieńmy na rysunkach w naszym wyjściowym zadaniu parabolę na inną stożkową — okrąg. To znaczy: poprowadźmy trzy proste styczne do okręgu (innymi słowy: opiszmy trójkąt na okręgu). Przez punkty przecięcia tych prostych przeprowadźmy nowy okrąg (tzn. opiszmy okrąg na trójkącie opisanym na wyjściowym okręgu, rys. 1). Oto kilka zadań, jakie podpowiada taka konfiguracja:

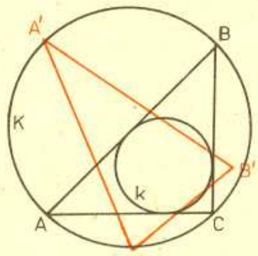
1° Dany jest okrąg k. Jakie ciekawe własności ma zbiór okręgów opisanych na trójkątach opisanych na k?

2° Dane są dwa okręgi k i K. Kiedy znajdzie się trójkąt wpisany w K, a opisany na k?



Rys. 1

Jeżeli R i r oznaczają odpowiednio promienie koła opisanego na trójkącie T i wpisanego weń, to — jak wiadomo — odległość ich środków jest równa $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$; stąd można wyprowadzić kompletną odpowiedź na pytanie *2°*. Możemy też podać inny, ,,dynamiczny'' dostateczny i konieczny warunek. Z dowolnego punktu $A \in K$ poprowadźmy styczną do k, przez punkt przecięcia tej stycznej z K następną styczną do k i jeszcze jedną (rys. 2). Jeżeli trzecia styczna trafi z powrotem na A, to dobrze, trójkąt znaleziony. A jeśli nie? Wziąć inny punkt i próbować? Na pewno też nic nie wyjdzie:



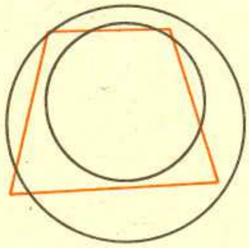
Rys. 2

Każdy punkt okręgu K opisanego na trójkącie T jest wierzchołkiem pewnego trójkąta wpisanego w K, a opisanego na okręgu k wpisanym w T; można to wykazać samodzielnie lub zajrzeć do książeczki Tadeusza Iwańca ,,Geometria okręgów i sfer'' (*Biblioteczka Delty*, M3, WSiP, 1980 r., zad. 32 na str. 37).

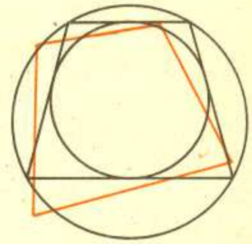
4. Co będzie, gdy opisana właśnie procedura nie da trójkąta; trzecia styczna nie trafi z powrotem w punkt wyjściowy? Może wyjść czworokąt i oto rysunek 3 sugeruje następne zagadnienia

3° Kiedy na czworokącie można opisać i wpisać okrąg?

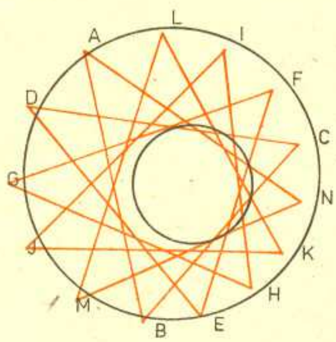
4° Czy przy innym punkcie wyjściowym również dostaniemy czworokąt (rys. 4)?



Rys. 3



Rys. 4



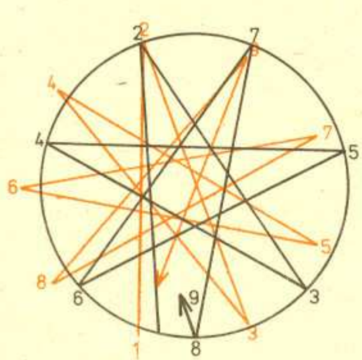
Rys. 5

A gdy przez kolejne prowadzenie stycznych nie powstanie czworokąt? Spójrzmy na rysunek 5. Są na nim dwa okręgi nie położone w żaden specjalnie szczególny sposób. Z punktu A zewnętrznego okręgu prowadzimy styczną do wewnętrznego, z punktu B przecięcia tej stycznej z okręgiem zewnętrznym następną styczną itd. Powstaje estetyczna, choć nierównoramienna gwiazda *ABCDEFGHIJKLMN*. Jak przewidzieć, znając tylko wzajemne położenie okręgów, jaką gwiazdkę otrzymamy? Gdy okręgi są współśrodkowe, odpowiedź jest prosta: gwiazda będzie n-ramienna, jeżeli stosunek promieni wynosi

$$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi m}{n}, \text{ gdzie } m, n \text{ — całkowite}$$

i ułamek m/n nieskracalny.

A gdzie zapowiedziany w tytule bilard? Nasze gwiazdki (takie jak na rys. 5) wyglądają jak tory kul odbijających się od brzegów kolistego bilardu, ale oczywiście takimi torami nie są — z wyjątkiem przypadku, gdy okręgi są współśrodkowe. Bilard kolisty widzimy na rys. 6. Zaznaczone kolorem punkty 1, ..., 9 tworzą trajektorię okresową dla obrotu (okręgu) określonego wzorem $\alpha \to \alpha + \frac{8}{9}\pi$. Nie jest ona przyciągająca.



Rys. 6

Na tym samym rysunku widzimy, że przy rysowaniu gwiazdek mały błąd na początku kumuluje się szybko (por. uwagę w pierwszej części artykułu Pawła Góry). Ciekawe własności innych bilardów, np. eliptycznego, można znaleźć w ,,Kalejdoskopie matematycznym'' Hugona Steinhausa.

dr Michał SZUREK