O lemacie Kuratowskiego-Zorna od innej strony

Dr Andrzej PELC

W artykule „Lemat Kuratowskiego-Zorna" Czytelnik zapoznał się z pewnymi dziwnymi funkcjami. Obecnie zastanowimy się, na czym owa dziwność polega. Jak wiemy, rozważane funkcje miały różne „nieprzyjemne" własności: były nieciągłe i nieograniczone w dowolnym otoczeniu zera. Nie o tym jednak chcemy teraz mówić. Szczególny charakter tych i podobnych obiektów matematycznych wynika ze sposobu ich określenia. Przyjrzyjmy się uważnie, jak zostały „powołane do życia" funkcje α_t z poprzedniego artykułu. Najpierw, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna udowodniono istnienie bazy Hamela Δ, a potem, stosunkowo już prosto (standardowa metoda algebry liniowej) zdefiniowano funkcje α_t. Tak więc trudność sprowadza się do sposobu „produkcji" bazy Hamela. Została ona wprowadzona jako element maksymalny w pewnym zbiorze częściowo uporządkowanym. Lemat Kuratowskiego-Zorna orzeka, że przy pewnych -- spełnionych w rozważanej sytuacji — założeniach taki element maksymalny istnieje. Reasumując: *wykazaliśmy istnienie* bazy Hamela, ale ... nie skonstruowaliśmy jej.

Najczęściej podawanym przykładem rozumowania niekonstruktywnego jest następujące rozwiązanie zadania: czy istnieją liczby niewymierne a i b takie, że a^b jest liczbą wymierną?

Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Jeżeli jest ona wymierna, to poszukiwanymi liczbami są $a = b = \sqrt{2}$. Jeżeli zaś jest to liczba niewymierna, to możemy przyjąć $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$, bowiem

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$$

Dość wyrafinowanymi metodami da się rozstrzygnąć, która z tych ewentualności ma miejsce (mianowicie druga), co umożliwia przerobienie łatwego niekonstruktywnego rozumowania na konstruktywne i trudniejsze. Warto jednak wiedzieć, że zadanie da się rozwiązać i prosto, i konstruktywnie. Oto bowiem

$$\sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\log_2 9} = 2^{\log_2 3} = 3,$$

a $\log_2 9$ nie jest liczbą wymierną (dlaczego?).

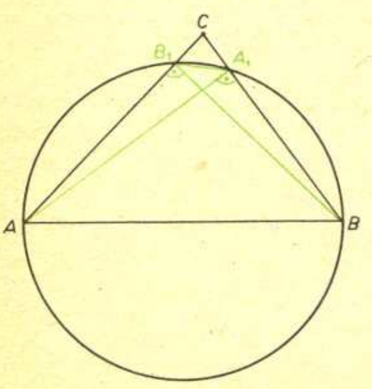
Bardzo trudno jest określić precyzyjnie, co się rozumie w matematyce (może poza geometrią elementarną) przez słowo „skonstruować". Sami matematycy nie są co do tego zgodni. Chodzi jednak ogólnie o to, by mając do wyboru wiele możliwości, nie ograniczać się do stwierdzenia, że wybieramy jedną z nich, lecz wskazać, *którą*.

O bazach Hamela wiemy, że istnieją, lecz nie potrafimy żadnej z nich zbudować w tym sensie, by po zakończeniu konstrukcji umieć odpowiedzieć na każde pytanie typu: czy $\sqrt{2}$ należy do tej bazy? Czy π należy do tej bazy? itd. Można udowodnić istnienie bazy Hamela, dla której odpowiedź na skończoną liczbę *z góry zadanych* pytań takich jak powyżej będzie znana. Inne pytania pozostaną jednak nierozstrzygnięte.

W tym więc rozumieniu niekonstruktywny dowód istnienia jakiegoś obiektu przypomina sytuację człowieka, który zgubił się w labiryncie wiedząc, że jest z niego wyjście (no, bo jakoś tam wszedł). Nic mu to jednak nie pomoże, gdy stanie przed kolejnym dylematem, który z trzech korytarzy na kolejnym skrzyżowaniu ma wybrać. *Konstruktywnym* dowodem istnienia wyjścia z labiryntu byłoby dla błądzącego wskazanie drogi (nić, którą rozwijała Ariadna świadczy o jej upodobaniu do metod konstruktywnych, prawda?).

Dowody wykorzystujące lemat Kuratowskiego-Zorna czy równoważny mu *pewnik wyboru* (zob. np. Delta 4/1981) noszą znamię „niekonstruktywizmu". Jak niebezpieczne może być beztroskie zadowalanie się istnieniem obiektów, o których naturze niewiele wiemy, świadczy następujący przykład. Konsekwencją tego samego lematu Kuratowskiego-Zorna jest następujący paradoks Banacha-Tarskiego: trójwymiarową kulę można rozłożyć na skończoną liczbę kawałków, które po odpowiednich ruchach dadzą dwie kule o tym samym promieniu co kula wyjściowa. Coś nie tak, a jednak to prawda. Po prostu kawałki te nie są określone „konstruktywnie" — dowodzi się jedynie ich istnienia.

Pomimo tego typu paradoksalnych konsekwencji metody niekonstruktywne, a wśród nich rozumowania oparte na lemacie Kuratowskiego-Zorna, są obecnie w powszechnym użyciu w różnych dziedzinach matematyki. Stanowią one po prostu potężne środki dowodowe, z których szkoda rezygnować. Warto jednak zdawać sobie sprawę z tego, że obiekty „powołane do życia" niekonstruktywnie mogą mieć — i często mają — nieoczekiwane, paradoksalne własności.



Rozwiązanie zadania M 309.

Niech najdłuższym bokiem $\triangle ABC$ będzie AB. Jeżeli $\sphericalangle C \geq 90°$, to do pokrycia $\triangle ABC$ wystarczy jedno koło o średnicy AB. Gdy teraz trójkąt jest ostrokątny, koło o średnicy AB pokrywa czworokąt AB_1A_1B, gdzie A_1, B_1 są spodkami wysokości poprowadzonych z A i B. Z trójkątów AA_1C i BB_1C mamy $A_1C = b\cos C$ i $B_1C = a\cos C$ i wobec tego trójkąt A_1B_1C jest podobny do $\triangle ABC$ w stosunku $\cos C$. Średnicą koła opisanego na $\triangle A_1B_1C$ jest więc $2R = \frac{A_1B_1}{\sin C} = \frac{c\cos C}{\sin C} = \operatorname{ctg} C$ i ponieważ C jest największym kątem trójkąta A_1B_1C, więc $\sphericalangle C \geq 60°$ i $\operatorname{ctg} C \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Trójkąt A_1B_1C możemy więc pokryć kołem o średnicy 1, a cały trójkąt ABC — dwoma kołami.