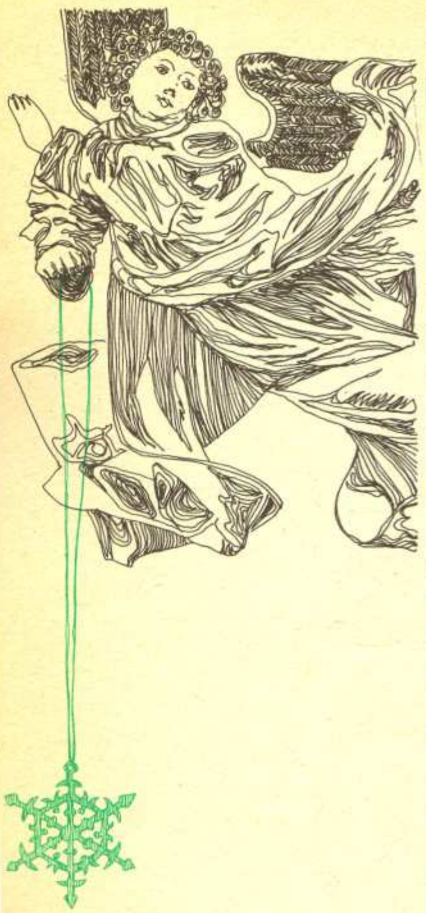


Kolineacja osiowa w zadaniach konstrukcyjnych

Dr Jerzy LISIEWICZ

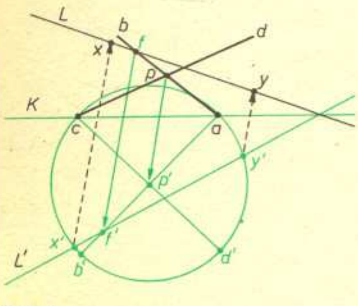
Przekształcenia geometryczne stanowią pokaźną część materiału programowego geometrii w szkole średniej. I słusznie. Przydatne są bowiem do rozwiązywania wielu zadań. Zwykle ułatwiają rozwiązanie, niekiedy czynią je bardziej ... eleganckim, a często pozwalają je znaleźć tam, gdzie inne metody zawodzą lub zmuszają nas do uciążliwego rachowania. Szczególnie efektowne jest rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych metodą przekształceń geometrycznych.

Na czym ta metoda polega?

Krótko mówiąc — na tym, że zamiast operować zadanymi figurami posługujemy się ich obrazami, co — przy odpowiednim doborze przekształcenia — znacznie upraszcza rozwiązanie.

Na ogół wiadomo, jak wykorzystuje się do zadań konstrukcyjnych **podobieństwa** (wśród nich **izometrie**). Mało okazji ma natomiast uczeń szkoły średniej, by przy rozwiązywaniu tego typu zadań posłużyć się inwersją względem okręgu lub powinowactwem osiowym. A interesujące to przekształcenia choćby dlatego, że zmieniają kształt figury.
Dołączenie do płaszczyzny euklidesowej jeszcze jednego punktu, który należy do **każdej** prostej, sprawia, że niektóre okręgi przechodzą przy inwersji na proste. Dobierając odpowiednio przekształcenie (przyjmując ten a nie inny okrąg inwersji) potrafimy sprowadzić zadanie do łatwiejszego: zamiast na okręgach działamy na prostych.

Powinowactwo osiowe pozwala na coś więcej: na wykonywanie konstrukcji związanych z figurą, której w ogóle nie potrafimy narysować (używając jedynie cyrkla i linijki). Mam na myśli **elipsę**. Umiemy wprawdzie — jak się to mówi — *zadać* jednoznacznie elipsę np. przez wykreślenie dwóch jej średnic sprzężonych (dwa odcinki dzielone przez punkt przecięcia na połowy) — umożliwia to znalezienie (konstrukcyjnie!) dowolnie wielu punktów elipsy — ale uzyskuje się w ten sposób izolowane punkty przypadkowe, nieprzydatne nawet w najprostszym zadaniu, gdy szukamy punktów wspólnych elipsy i prostej.

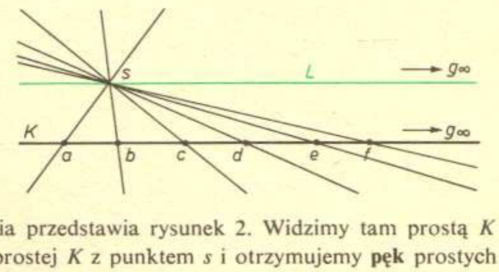


Rys. 1

A jeśli skorzystamy z powinowactwa osiowego? Popatrzmy ... Niech średnice sprzężone $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$ elipsy przecinają się w punkcie p (rys. 1). Zbudujemy na $\overline{ac}$ — jako na przeciwprostokątnej — równoramienny trójkąt prostokątny acp' i z punktu p' zakreślamy okrąg promieniem ap'. Jeśli za oś powinowactwa przyjmiemy prostą K przechodzącą przez a i c, zaś punkt p' za obraz punktu p przy tym powinowactwie, to określone tak przekształcenie przeprowadza zadaną (choć nie narysowaną) elipsę na wykreślony okrąg. Aby znaleźć punkty x, y przecięcia elipsy jakąś prostą L, wystarczy wykreślić L' (obraz prostej L przy skonstruowanym powinowactwie) i odszukać (na L) przeciwobrazy punktów x', y' przecięcia L' z okręgiem. Na rysunku 1 dokonano tego prowadząc przez x', y' proste równoległe do $\overline{pp'}$ (a więc proste należące do kierunku powinowactwa).

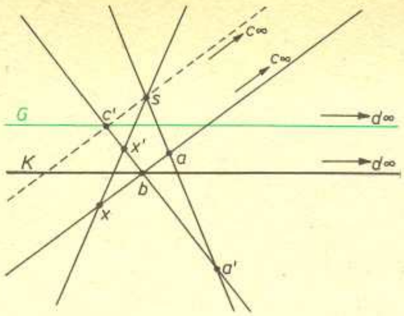
No, dobrze — powie mi uczeń klasy III — z elipsą się udało, bo to krzywa ograniczona. A ja znam jeszcze dwie inne stożkowe: parabolę i hiperbolę; obie „ciągną się bez końca". Parabola w jednym kierunku (w kierunku swej osi), hiperbola nawet w dwóch (kierunkach jej asymptot). Czy dla nich istnieje przekształcenie, które umożliwia podobne konstrukcje?

Owszem, istnieje. Nosi nazwę **kolineacji osiowej** i działa podobnie jak powinowactwo osiowe. Żeby je zastosować, musimy jednak uzupełnić naszą płaszczyznę euklidesową tak, by i te „najdalsze" punkty paraboli lub hiperboli (zwane zwykle punktami „w nieskończoności" lub punktami „niewłaściwymi") mogły być wykorzystane do konstrukcji.



Rys. 2

Sposób tego uzupełnienia przedstawia rysunek 2. Widzimy tam prostą K i punkt s poza nią. Łączymy **każdy** punkt prostej K z punktem s i otrzymujemy **pęk** prostych o wierzchołku s. Czy istotnie pęk? Nie. Brak w nim jednej prostej: prostej L, równoległej do K. Umówmy się, że prosta L również łączy punkt s z pewnym punktem na prostej K (takim „w nieskończoności"), z jej — jak powiemy — **punktem niewłaściwym**. Wspólny punkt niewłaściwy dwóch prostych równoległych oznacza się tak, jak zaznaczony jest punkt g^∞ na rysunku 2.



Rys. 3

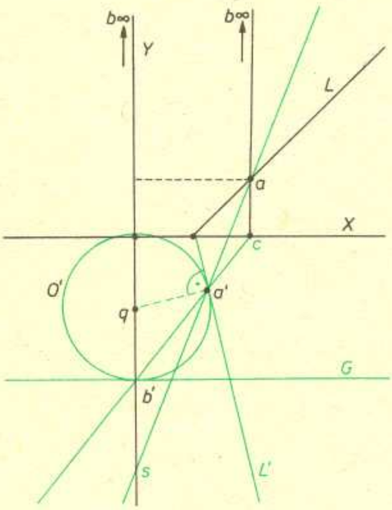
Na tak wzbogaconej płaszczyźnie (zwanej płaszczyzną rzutową) każde dwie proste przecinają się, parabola i hiperbola stają się krzywymi zamkniętymi, ale ... nie wnikajmy aż w takie szczegóły. Przetłumaczmy nasze zdanie odnoszące się do płaszczyzny rzutowej na język zwykłej płaszczyzny: „Połączyć punkt s z punktem niewłaściwym jakiejś prostej L" oznacza „poprowadzić przez s prostą równoległą do L".

Określę teraz kolineację osiową płaszczyzny rzutowej. Niech będzie dana prosta K (oś kolineacji) i punkt s (środek kolineacji) poza nią. Przyjmijmy jeszcze dwa punkty a, a' takie, że s leży na prostej aa' ($a \neq s \neq a'$ i $a \notin K$ i $a' \notin K$).

Położenie x' — obrazu punktu x płaszczyzny — określone jest dwoma warunkami:

1) Punkty s, x, x' mają być współliniowe;
2) Każda prosta (np. ax) i jej obraz ($a'x'$) przecinają się na prostej K.

Spójrzmy na rysunek 3. Pokazano tam przede wszystkim, jak znaleźć obraz zadanego punktu x. Punktu x' szukamy na prostej sx (bo s, x, x' mają być współliniowe) i jednocześnie na prostej ba' (gdzie b jest punktem, w którym prosta ax przecina oś kolineacji).



Rys. 4

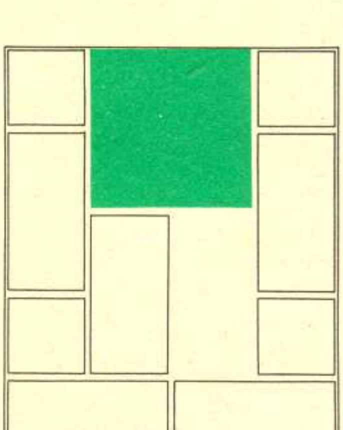
Ale to nie wszystko. Połączmy punkt s z punktem niewłaściwym (c^∞) prostej ax (czyli wykreślamy przez s równoległą do ax). Jako obraz punktu niewłaściwego otrzymamy ... punkt c'. I to nie przypadek. Łatwo sprawdzić, że obrazem **dowolnego** punktu niewłaściwego (prócz d^∞ na K) jest tu punkt właściwy. Mało tego. Obrazy wszystkich punktów niewłaściwych płaszczyzny leżą na jednej prostej (zwanej prostą **graniczną**), równoległej do osi K.

Teraz już chyba łatwo dostrzec, że kolineacja osiowa może przeprowadzić dowolną stożkową na elipsę (wszystkie punkty właściwe), a nawet na okrąg. Dokonajmy tego np. dla paraboli zadanej równaniem $x^2-4y = 0$. Wierzchołkiem tej paraboli jest $p(0, 0)$, jej osią oś Y układu współrzędnych, a skoro dla $x = 2$ jest $y = 1$, to punkt $a(2, 1)$ należy do tej paraboli. I to nam wystarczy.

Przyjmijmy okrąg O o środku q styczny do osi X jako ten, na który ma przejść parabola (rys. 4). Oś X niech będzie osią kolineacji, a prosta G równoległa do X i styczna do O — prostą graniczną. Obrazem punktu b^∞ paraboli jest tu punkt b' na G. Znajdźmy jeszcze obraz punktu a: połączmy a z b linią prostą (czyli poprowadźmy przez a równoległą do Y) przecinającą oś X w punkcie c; $\overline{cb'}$ przecina okrąg w szukanym punkcie a'. Środek kolineacji uzyskamy jako punkt s przecięcia prostych $b^\infty b'$ i aa'.

Gdyby nam teraz polecono znaleźć punkty wspólne paraboli zadanej (ale nie narysowanej; bo jak?) z jakąś prostą, znaleźlibyśmy obraz prostej przy tej kolineacji osiowej, wykonalibyśmy konstrukcję na okręgu i prostej i ... wrócilibyśmy na prostą i parabolę. Na rysunku 4 rozwiązałem konstrukcyjnie inne zadanie: Przez dany punkt a poprowadzić do naszej paraboli *styczną*. Gdy ma się już skonstruowany okrąg, będący obrazem paraboli przy określonej kolineacji, rozwiązanie sprowadza się do wykreślenia L' stycznej do okręgu w punkcie a' (obraz punktu a) i znalezienia jej przeciwobrazu — L.

Gra



W starym belgijskim czasopiśmie „Math-Jeunes" znaleźliśmy jeszcze jednego protoplastę kostki Rubika. W prostokącie 4×5 jest 10 żetonów ułożonych jak na rysunku z lewej. Celem gry jest przemieszczenie dużego kwadratu 2×2 w położenie jak na rysunku z prawej, przez przesuwanie prostokątnych żetonów poziomo i pionowo. Według „Math-Jeunes" wymaga to ponad 100 posunięć.

Można oczywiście wybrać sobie inne docelowe położenie kolorowego kwadratu. Czy każde?

A oto bardziej skomplikowane pytanie. Czy można w naszej układance przestawić dowolne dwa np. kwadraciki 1×1 (albo: dwa dolne poziome prostokąty) nie zmieniając położenia pozostałych klocków? Nie wiemy.