natomiast stosunek ich gęstości

$$\frac{n_L}{n_R} = \left(\frac{T_L}{T_R}\right)^3 = 14.$$

Wynika stąd, że obecnie Wszechświat jest zdominowany przez neutrina lewoskrętne.

Możemy teraz znaleźć dwa takie momenty rozwoju Wszechświata, albo dwa takie przesunięcia ku czerwieni z_L i z_R, dla których parametry gazu złożonego z neutrin lewoskrętnych są identyczne z parametrami gazu złożonego z neutrin prawoskrętnych. Przesunięcia te wiąże zależność

$$T_L(z_L) = T_R(z_R).$$

Wynikają stąd równości podstawowych parametrów gazu

$$n_L(z_L) = n_R(z_R) \quad \text{oraz} \quad v_L(z_L) = v_R(z_R).$$

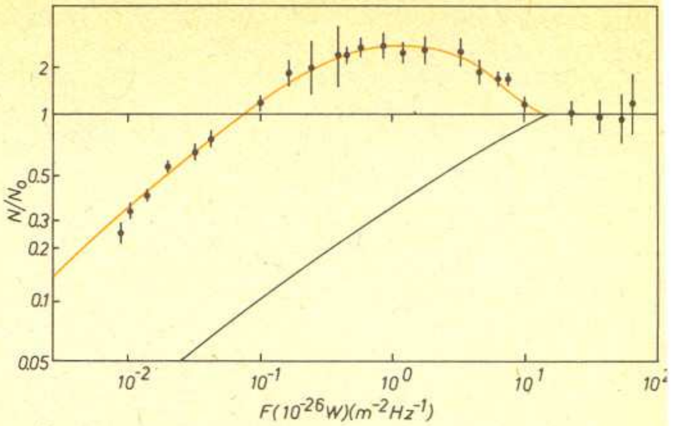
Poza tym $1+z \sim \frac{1}{T}$, a więc przesunięcia spełniają zależność

$$(3) \qquad \frac{1+z_L}{1+z_R} \simeq \frac{1}{2{,}4}.$$

Niezależnie od szczegółów mechanizmu narastania zaburzeń neutrinowych i powstawania gromad galaktyk można stąd wysnuć wniosek, że warunki powstawania „wysp" złożonych z neutrin prawoskrętnych dla $z = z_R$ są identyczne jak dla neutrin lewoskrętnych przy $z = z_L$. Czy oznacza to, że w historii Wszechświata istniały dwie populacje galaktyk odpowiadające z_R i z_L?

Jak wiadomo, współczesne teleskopy sięgają nie dalej niż do $z \simeq 1$. O wiele większe odległości obejmują obserwacje radioźródeł. Systematyczne badania źródeł promieniowania radiowego prowadzi od dawna grupa astronomów z Cambridge (Wielka Brytania). W czasie tych badań okazało się, że poza płaszczyzną Galaktyki radioźródła rozmieszczone są równomiernie, co oznacza, że są to obiekty pozagalaktyczne.

Zliczenia prezentowane są zwykle w formie zależności N/N_0 od mocy promieniowania odbieranej przez jednostkę powierzchni anteny, na jednostkę przedziału częstości (F); N_0 jest liczbą radioźródeł przy założeniu braku ewolucji źródeł i ich jednorodnego rozmieszczenia oraz przy pominięciu ekspansji.



Rys. 2 Unormowane wyniki zliczeń radioźródeł. Czarna krzywa odpowiada typowym modelom kosmologicznym.

Typowe modele kosmologiczne np. model Friedmana przewidują monotoniczny wzrost N/N_0 z F, co jest całkowicie sprzeczne z obserwacjami (rys. 2). Fakt ten jest jednym z argumentów za koniecznością uwzględnienia ewolucji galaktyk przy próbie interpretacji obserwacji radioastronomicznych.

Spróbujmy teraz pofantazjować i porównajmy te trudne do interpretacji obserwacje z pełnym niepewnych założeń modelem. Załóżmy, że nasza galaktyka należy do drugiej populacji. Bezpośrednie oszacowanie jej wieku oraz nieciągłość na rys. 2 sugerują, że $z_L \simeq 0{,}7 \div 1$.

Wtedy z zależności (3) $z_R \simeq 2{,}6 \div 3{,}8$.

Tak więc w obszarze $3 \gtrsim z \gtrsim 1$ można się spodziewać wielu galaktyk z pierwszej populacji. Jak widać na rys. 2 gęstość radioźródeł rośnie w tym obszarze 100 razy. Jak dotychczas nie udało się znaleźć zadowalającego wyjaśnienia tego wzrostu. Być może są to radioźródła związane z galaktykami we wnętrzu rozległych „wysp" utworzonych z neutrin prawoskrętnych. Czy powyższe argumenty za tym, że tak jest w istocie, można będzie traktować poważnie, zależy od bardziej szczegółowych obliczeń modelowych, a przede wszystkim od wyników obserwacji w widmie optycznym galaktyk o $z \gtrsim 1$.

Jak gromadzić zapasy

Dr Maria JANKIEWICZ

Odpowiedź na pytanie zawarte w tytule może być natychmiastowa, choć nieścisła. Zapasy należy gromadzić tak, aby rzadko było widać dno spiżarni, a jednocześnie aby one się w niej mieściły. Gdybyśmy chcieli tę odpowiedź uściślić, okazałoby się, że nie jest to takie proste, gdyż w grę wchodzi przypadek; nie wiemy dokładnie ani kiedy uzupełnimy zapasy, ani w jakiej ilości. Istnieją skomputeryzowane domowe spiżarnie i jakże potrzebne modele przemysłowe, na przykład model spiętrzania wody w zbiorniku. Stały Czytelnik *Delty* miał okazję nabyć pewne wiadomości o modelach matematycznych i ich stosowaniu (*Delta* 7/1978). Przystąpimy zatem do opisu wybranego modelu teorii tam (zapór), która to właśnie zajmuje się badaniem praw rządzących fluktuacjami zawartości zbiornika magazynującego wodę.

Model wiąże się z nazwiskiem Morana, który zainicjował około 1954 roku badania w teorii tam. Strumień wody wpływającej do zbiornika określają chwile $0 = T_0 < T_1 < \ldots$, w których następują wpływy $S_0, S_1, \ldots$ Zmienne losowe $\tau_n = T_{n+1} - T_n$, S_n, $n = 0, 1, \ldots$ są nieujemne i niezależne (niezależność zmiennych losowych — np. *Delta* 12/1978). Taki nieciągły strumień wpływu otrzymujemy na przykład wtedy, gdy jest on jednocześnie strumieniem przelewów z innego zbiornika.

Woda w zbiorniku jest spiętrzana i używana zgodnie z określonymi regułami. Używa się jej np. do napędu elektrowni lub pobiera do spożycia. Podstawową charakterystyką modelu jest zapas wody $Z(t)$ w chwili t. Przy ustalonym t jest to zmienna losowa, a przy zmieniającym się t proces stochastyczny.

W modelu Morana przyjmuje się, że zużycie wody jest ciągłe w czasie, a prędkość wypływu w chwili t jest funkcją zapasu $r(Z(t))$. Jeśli zbiornik jest pusty, to prędkość wypływu musi być równa zeru, przyjmujemy zatem, że funkcja r spełnia założenie $r(0) = 0$, a ponadto, że r jest dodatnia i ciągła w zbiorze $(0, \infty)$. W punkcie zero funkcja r może być prawostronnie nieciągła, zatem $r(u) = c$, $u > 0$, $c > 0$ lub $r(u) = \frac{1}{u}$, $u > 0$, są dopuszczalnymi funkcjami wypływu. Na razie dla uproszczenia modelu przyjmujemy jeszcze, że pojemność zbiornika jest nieskończona, czyli nie ma przelewów. Możliwość przelewu uwzględnimy w jednym z przykładów.

Naszym celem jest określenie zapasu wody w dowolnej chwili przy danym strumieniu wpływu, danej funkcji wypływu i zapasie początkowym Z_0. Najpierw wyobraźmy sobie następującą sytuację deterministyczną. W zbiorniku mamy zapas x, nic do niego nie wpływa, a wypływ odbywa się zgodnie z regułą Morana.

Przez $q = q(x, t)$ oznaczamy zapas po czasie t. Ponieważ prędkość wypływu jest pochodną funkcji q względem t, mamy więc równanie

$$(1) \qquad \frac{dq}{dt} = -r(q), \quad t > 0,$$

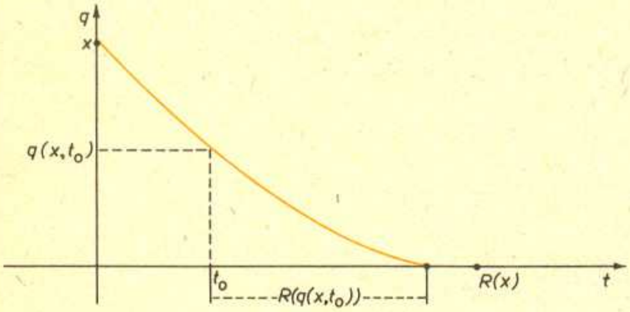
przy warunku początkowym $q(x, 0) = x$.
Rozwiążmy równanie (1) przy założeniu, że dla zapasu x skończony jest czas $R(x)$, po którym ten zapas zniknie. Gdyby prędkość wypływu r była jednostkowa ($r(u) = 1$, $u > 0$), wówczas byłoby $R(x) = x$. Z równania (1) otrzymujemy

$$(2) \qquad -\frac{1}{r(q)}\, dq = dt,$$

gdzie dq jest przyrostem funkcji q odpowiadającym przyrostowi czasu dt. Gdy czas t zmienia się od 0 do $R(x)$, zapas q zmienia się od x do 0. Całkując (2) obustronnie mamy

$$(3) \qquad \int_0^x \frac{1}{r(q)}\, dq = \int_0^{R(x)} 1 dt = R(x).$$

Stąd czas $R(x)$ potrzebny do zniknięcia zapasu x przy braku wpływów jest równy polu pod wykresem funkcji $1/r$ w przedziale $\langle 0, x)$.



Rys. 1

Funkcja R w prosty sposób wyznacza funkcję q. Patrząc na rys. 1 widzimy związek

$$(4) \qquad R(x) - R(q(x, t)) = t, \quad t \leqslant R(x).$$

Z wzoru (3) wynika, że funkcja R jest rosnąca w przedziale $(0, \infty)$, gdyż pole pod wykresem funkcji dodatniej rośnie, gdy powiększymy przedział. Istnieje więc funkcja odwrotna R^{-1} w przedziale $(0, \infty)$. Przyjmując $R^{-1}(u) = 0$ dla $u \leqslant 0$ i korzystając ze związku (4) otrzymujemy

$$(5) \qquad q(x, t) = R^{-1}(R(x) - t).$$

Teraz, jeżeli przyjmiemy deterministyczne chwile wpływów $0 = t_0 < t_1 < \ldots$, deterministyczne wpływy $s_0, s_1, \ldots$ oraz zapas początkowy z_0, to możemy przy użyciu funkcji q określić zapas $z(t)$ w dowolnej chwili $t > 0$. Ponieważ dla $t \in (t_0, t_1)$ nie ma wpływów, więc zapas w tym przedziale czasu określa funkcja $q(z_0 + s_0, t - t_0)$. W chwili t_1 następuje nowy wpływ s_1, który należy dodać do wartości $q(z_0 + s_0, t_1 - t_0)$, aby otrzymać nowy warunek początkowy dla funkcji q, aktualny do chwili t_2.
W ten sposób wykres zapasu wyznaczamy sklejając wykresy funkcji q przy odpowiednich warunkach początkowych, a punkty sklejania są punktami nieciągłości. Oznaczając dla wygody przez z_n zapas tuż przed chwilą wpływu t_n, łatwo napisać wzory rekurencyjne

$$(6) \qquad z_{n+1} = q(z_n + s_n, t_{n+1} - t_n),$$

$$(7) \qquad z(t) = q(z_n + s_n, t - t_n), \; t_n \leqslant t < t_{n+1}, \; n = 0, 1, \ldots$$

Dokładniej: z_n jest granicą lewostronną wartości $z(t)$, gdy t dąży do t_n przez wartości mniejsze od t_n

W modelu losowym Morana zapas wody $Z(t)$, przy ustalonym t, jest funkcją określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych o wartościach w R_+ ($R_+ = \langle 0, \infty)$). Natomiast przy ustalonym $\omega \in \Omega$ tenże zapas jest funkcją określoną na R_+ i o wartościach w R_+.

Tę ostatnią nazywamy *trajektorią* procesu zapasu. Zauważmy, że wzory (6), (7) określają trajektorię zapasu, jeśli przyjmiemy w nich $t_n = T_n(\omega)$, $s_n = S_n(\omega)$, $n = 0, 1, \ldots, z(t) = Z(t)(\omega)$, $t \geqslant 0$.
Podamy teraz przykłady stosowanych w teorii tam funkcji zapasu q.
Przykład 1. *Wypływ stały.* Niech $r(u) = 1$, $u > 0$. Wtedy $R(u) = u$, $R^{-1}(u) = u$, a funkcja q ma postać

$$q(x, t) = [x - t]^+,$$

gdzie $[u]^+ = \max(0, u)$. Tym szczególnym modelem zajmuje się teoria obsługi masowej (teoria kolejek). W niej T_n interpretuje się jako chwilę wejścia n-tej jednostki (klienta) do systemu, s_n jako czas obsługi n-tej jednostki, a $Z(t)$ jako czas czekania jednostki, która zgłosiłaby się do systemu w chwili t (wirtualny czas czekania). Ważną charakterystyką wówczas jest czas czekania n-tej jednostki (aktualny czas czekania) Z_n określony równością $Z_n(\omega) = z_n$, $\omega \in \Omega$ (zob. wzór (6)).
Przykład 2. *Wypływ proporcjonalny.* Niech $r(u) = u$, $u > 0$. Można sprawdzić, że wtedy $R(x) = +\infty$ dla dowolnego $x > 0$. Jednak równanie (1) można rozwiązać, choć nie mamy wówczas postaci (5) rozwiązania. Nie wgłębiając się w rachunki podamy postać funkcji zapasu

$$q(x, t) = x\exp(-t) \; (= xe^{-t}), \; t \geqslant 0.$$

Zauważmy, że w tym modelu funkcja q jest dodatnia dla dowolnie dużego t i każdego dodatniego x. Zatem przy tej funkcji wypływu zbiornik nigdy nie jest pusty.
Równanie (1) z tą funkcją r jest także równaniem zapasu substancji promieniotwórczej.
Przykład 3. *Wyjście proporcjonalne przesunięte.* Wystarczy przesunąć wykres funkcji r z przykładu 2 w górę o stałą, aby $R(x)$ było skończone. Niech $r(u) = 1 + u$, $u > 0$. Wtedy $R(u) = \ln(1 + u)$, $R^{-1}(u) = \exp(u) - 1$, a funkcja q przyjmuje postać

$$q(x, t) = [(1 + x)\exp(-t) - 1]^+.$$

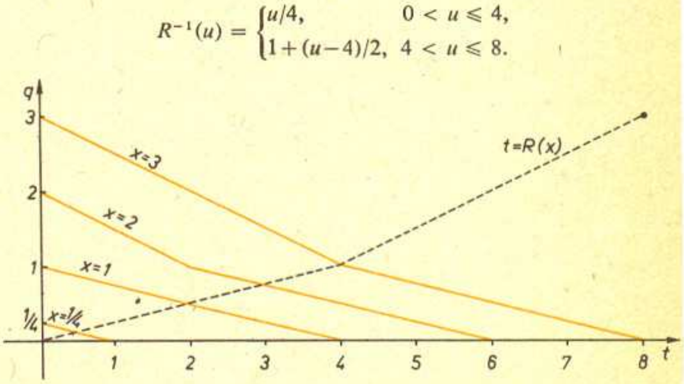
Gdy zapotrzebowanie nie może być mniejsze od pewnej dodatniej stałej, czyli prędkość wpływu jest odseparowana od zera, wówczas funkcja q jest równa zeru począwszy od pewnego t; w tym przykładzie od $t = \ln(1 + x)$.
Przykład 4. *Wejście przedziałami stałe, skończona pojemność zbiornika.* Założenie o ciągłości funkcji r w $(0, \infty)$ nie jest konieczne do rozwiązania równania (1). Przyjmijmy

$$r(u) = \begin{cases} 1/4, & 0 < u \leqslant 1, \\ 1/2, & 1 < u \leqslant 3, \\ +\infty, & 3 < u. \end{cases}$$

Ta funkcja r uwzględnia skończoną pojemność zbiornika, gdyż przy zapasie większym od trzech powoduje przelew. Obliczamy

$$R(u) = \begin{cases} 4u, & 0 < u \leqslant 1, \\ 4 + 2(u-1), & 1 < u \leqslant 3, \\ 8, & 3 < u, \end{cases}$$

$$R^{-1}(u) = \begin{cases} u/4, & 0 < u \leqslant 4, \\ 1 + (u-4)/2, & 4 < u \leqslant 8. \end{cases}$$



Rys. 2

Wybrane funkcje q dla pewnych wartości początkowych x są przedstawione na rys. 2.

Funkcja wpływu może być nieciągła, gdy sterujemy zapasem wody. Jeśli spada on poniżej krytycznego poziomu, wyłączamy niektóre ujścia zmniejszając prędkość wypływu albo odwrotnie, jeśli zbyt się podnosi, włączamy dodatkowe ujścia (zapasowy zbiornik), aby zapobiec przelewowi.
Określenie trajektorii procesu zapasu jest dopiero wstępem do właściwego jego badania. W modelu Morana znane są wzory wyrażające chwilowy rozkład prawdopodobieństwa $P\{Z(t) \leqslant z\}$, $z \geqslant 0$, warunek dostateczny istnienia granicy $\lim P\{Z(t) \leqslant z\}$ i postać tego granicznego rozkładu. Przy dodatkowym założeniu, że rozkład zmiennych losowych τ_n jest wykładniczy, niezależny od n (rozkład wykładniczy — np. *Delta* 12/1978) znany jest również warunek konieczny i dostateczny istnienia rozkładu granicznego oraz jego postać.

Inną ważną charakterystyką modelu, badaną w teorii tam, jest tzw. czas do pierwszego wyschnięcia zbiornika mimo uzupełnień, czyli czas od chwili $t = 0$ do chwili, w której zbiornik po raz pierwszy jest pusty. Czas ten jest również zmienną losową, a w modelu Morana znana jest postać jej rozkładu prawdopodobieństwa.
Poza modelem Morana badano do tej pory wiele innych modeli teorii tam, w których strumień wpływu był ciągły albo oba strumienie wpływu i wypływu były nieciągłe. Jednocześnie wiele problemów pozostało do rozwiązania nawet w tak stosunkowo dobrze zbadanym modelu Morana, jak chociażby wspomniany warunek konieczny i dostateczny istnienia granicznego rozkładu zapasu bez założenia wykładniczości odstępów między chwilami wpływów.

Wyniki Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Tradycyjnym zwyczajem ogłaszamy kolejny konkurs uczniowskich prac matematycznych. W tym roku po raz pierwszy w konkursie zabraknie prac maturalnych, bo nowy regulamin matur nie przewiduje takich prac. Sądzimy jednak, że wielu naszych Czytelników zechce swoje rozważania nad matematyką opracować i przysłać na nasz konkurs.

Jury w składzie: prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący, dr Wacław Wierzbicki — przedstawiciel Ministerstwa Oświaty i Wychowania, dr Alicja Derkowska, dr Marek Kordos, dr Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, prof. dr Wojciech Żakowski, na posiedzeniu w dniu 09.09.1982, biorąc pod uwagę temat pracy, jej wykonanie oraz przebieg obrony postanowiło przyznać:

1. Złoty medal Mariuszowi Skałbie (IV LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie) za pracę ,,O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb";
2. Srebrny medal Januszowi Kalinowskiemu (XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu) za pracę ,,Powierzchnie stopnia drugiego i rysowanie kwadryk za pomocą komputera WANG 2200T";
3. Brązowy medal Mirosławowi Matlędze (Technikum Budowlane w Cieszynie) za pracę ,,Rozcięcia powierzchni jednostronnych";
4. Dwa wyróżnienia:
Rogerowi Bielawskiemu (VI LO w Bydgoszczy) za pracę ,,Własności sumy potęg kolejnych liczb naturalnych",
Lechowi Zielińskiemu (XIV LO im. K. Gottwalda w Warszawie) za pracę ,,Wprowadzenie relacji porządku w przestrzeniach liniowych nad ciałem liczb rzeczywistych";
5. Dyplomy uczestnictwa w finale Konkursu:
Jarosławowi Drozdowskiemu (XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu) za pracę ,,Rozwiązywanie problemów ekonomicznych metodą programowania liniowego",
Michałowi Wojciechowskiemu (XIV LO im. K. Gottwalda w Warszawie) za pracę ,,Pewne uogólnienie konstrukcji Steinera".

Ministerstwo Oświaty i Wychowania przyznało nagrody pieniężne laureatom i nauczycielom finalistów:
Lucynie Rędziak, Józefowi Łozińskiemu, Bogusławowi Adamkowi, Irenie Ołdak i Jerzemu Bednarczukowi.

Skrót zwycięskiej pracy będzie opublikowany w *Delcie* 3/1983.

Regulamin konkursu uczniowskich prac z matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury tego Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.