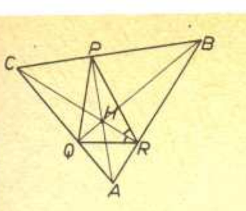
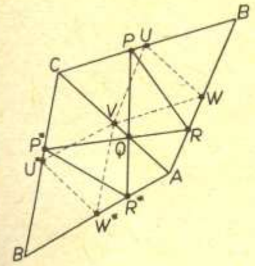
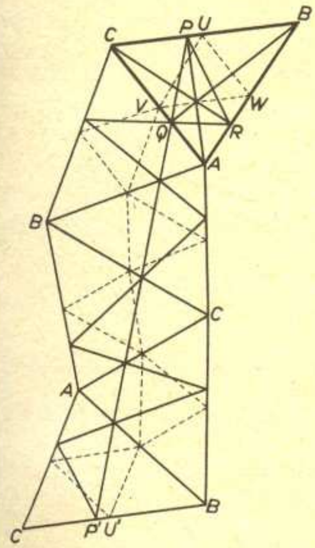
Piękny dowód Schwarza



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

W artykule „Problem Kakeya" autor wspomniał o problemie Fagnano: *w dany trójkąt ostrokątny wpisać trójkąt o jak najmniejszym obwodzie.* Warto opisać bardzo ciekawe rozwiązanie tego zagadnienia, podane przez H. A. Schwarza.

Wykażemy, że rozwiązaniem jest trójkąt PQR (rys. 1) utworzony przez spodki wysokości danego trójkąta ABC.
1) W oznaczeniach jak na rys. 1 mamy $\sphericalangle QRH = \sphericalangle HRP$. Dla dowodu starczy zauważyć, że punkty Q, A, R, H leżą na okręgu (o średnicy AH) i „pobawić się" trochę widocznymi kątami.
2) Narysujmy inny trójkąt UVW wpisany w $\triangle ABC$. Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy, że obwód $\triangle UVW$ nie jest mniejszy niż trójkąta PQR. Odbijmy rysunek symetrycznie w prostej AC (rys. 2). Obrazy punktów A, B, C, będziemy tu i przy następnych odbiciach oznaczać też przez A, B, C — ta dwuznaczność oznaczeń nic nam nie zaszkodzi. Obrazy punktów P, R, U, W oznaczymy przez P^*, R^*, U^*, W^*. Oczywiście trójkąty PQR i P^*QR^* są przystające, a punkty P, Q, R^*, a także punkty P^*, R, Q — współliniowe (zob. 1). Stąd mamy np. że $|PR^*| = |PQ|+|QR|$. Bok BC został obrócony o $2\sphericalangle C$.
3) Odbijmy symetrycznie tak powstały trójkąt ABC jeszcze cztery razy: w AB, potem w BC, AC i na koniec jeszcze raz w AB. Całą tę serię odbić widzimy na rysunku 3. Co stało się z bokiem BC pierwotnego trójkąta ABC? Obrócił się o $2\sphericalangle C$, potem o $2\sphericalangle B$, następnie o $-2\sphericalangle C$ i wreszcie o $-2\sphericalangle B$ — a więc zachował swój kierunek. Z tego zaś, co stwierdziliśmy w punkcie 2) wynika jasno, że obwód trójkąta PQR „rozłożył się" wzdłuż prostej PP'. Dokładniej:

$$PP' = 2\cdot \text{obwód } \triangle PQR.$$

Co stało się z obwodem trójkąta UVW? Odwinął się wzdłuż łamanej UU', zaznaczonej na rysunku 3 przerywaną linią. Łamana, jak to łamana, nie jest krótsza od odcinka łączącego jej końce. Tak oto dowiedliśmy, że spośród wszystkich trójkątów wpisanych w dany trójkąt ostrokątny najkrótszy obwód ma trójkąt utworzony ze spodków wysokości.

M. Sz.

Rozwiązanie zadania M 335.

Z warunków zadania wynika, że $x_1^3 = 3x_1 - 1$, skąd $x_1^4 = 3x_1^2 - x_1$. Podnosząc ostatnią równość do kwadratu mamy

$$x_1^8 = 9x_1^4 - 6x_1^3 + x_1^2 = 27x_1^2 - 9x_1 - 18x_1 + 6 + $$
$$+ x_1^2 = 28x_1^2 - 27x_1 + 6.$$

Analogiczne wzory zachodzą dla x_2 i x_3, mamy więc $x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 28(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 27(x_1 + x_2 + x_3) + 18 = 28((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)) - 27(x_1 + x_2 + x_3) + 18$. Ale $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -3$ (z wzorów Viete'a). Ostatecznie $x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 28\cdot 6 + 18 = 186$.

Rozwiązanie zadania M 336.

Łatwo zauważyć, że $x, y > n$. Pisząc $x = n+u$, $y = n+v$ mamy $\frac{1}{n+u} + \frac{1}{n+v} = \frac{1}{n}$, czyli $n(n+v) + n(n+u) = (n+u)(n+v)$, skąd wynika, że $n^2 = uv$.
Gdy teraz n jest liczbą pierwszą, to jedynymi rozwiązaniami równania $n^2 = uv$ są: $u = 1$, $v = n^2$; $u = v = n$; $u = n^2$, $v = 1$, odpowiadające rozwiązaniom

$$x = n+1, \quad y = n^2+n; \quad x = y = 2n;$$
$$x = n^2+n, \quad y = n+1.$$

Jeżeli teraz $n = k\cdot l$, $k, l \neq 1$, to mamy np. rozwiązanie $u = k$, $v = kl^2$, czyli $x = n = k$, $y = n + kl^2$, różne od wyżej wypisanych.

Rozwiązanie zadania F 137.

Siła Ampère'a, $F = I\Delta l \times B$, nie jest jedyną siłą działającą na przewodnik z prądem poruszający się w polu magnetycznym. Całkowita praca siły Lorentza działającej na przewodnik istotnie jest zerowa, ponieważ składa się z pracy mechanicznej związanej z siłą Ampère'a i z pracy pola elektrycznego indukowanego w poruszającym się przewodniku (równej pracy siły Ampère'a co do wielkości, ale o przeciwnym znaku). W ten sposób pole magnetyczne umożliwia transport energii od źródła prądu do otoczenia, nad którym wykonywana jest praca mechaniczna.
Aby się o tym przekonać, rozważmy prostoliniowy element przewodnika poruszający się z prędkością v w polu magnetycznym o indukcji B. Załóżmy, że jednostka objętości przewodnika składa się z n_+ jonów sieci krystalicznej o ładunkach q i n_- elektronów przewodnictwa o ładunkach $-e$, dryfujących (po przyłożeniu napięcia zewnętrznego) z prędkością u.
Całkowita siła Lorentza działająca na jednostkę objętości przewodnika w polu magnetycznym składa się z sił działających na jony (f_+) i na elektrony (f_-):

$$f = f_+ + f_-;$$
$$f_+ = n_+ q v \times B$$
$$f_- = -n_- e(v+u) \times B.$$

Praca mechaniczna tej siły w czasie Δt wynosi

$$w_m = f\cdot v\Delta t = [n_+ qv \times B - n_- e(v+u)\times B]\cdot v\Delta t$$
$$= -n_- e\Delta t(u \times B)\cdot v.$$

Ponieważ $j = -n_- eu$ jest gęstością prądu płynącego w przewodniku, rozpoznajemy w tym wyrażeniu pracę siły Ampère'a. Nie jest to jednak całkowita praca siły f: nie uwzględniliśmy faktu, że elektrony poruszają się nie z prędkością przewodnika v, lecz z prędkością $v+u$. Całkowita praca w czasie Δt wynosi więc

$$w = [f_+\cdot v + f_-\cdot (v+u)]\Delta t$$
$$= -n_- e[(v+u)\times B]\cdot (v+u)\Delta t$$
$$= -n_- e[(u\times B)\cdot v + (v\times B)\cdot u]\Delta t = 0.$$

Np. aby silnik elektryczny mógł wykonać pracę mechaniczną, drugi składnik pracy w musi zostać zrównoważony przez pracę źródła prądu, albowiem pochodzi on od siły przeciwdziałającej ruchowi dryfowemu elektronów przewodnictwa. W ten sposób, jak zapowiadaliśmy, pole magnetyczne umożliwia zamianę energii źródła prądu na pracę mechaniczną.
Efektem działania siły Lorentza na elektrony jest również zmiana ich koncentracji w obrębie przewodnika. Pominęliśmy ją w naszych rozważaniach jako nieistotną. Warto jednak prześledzić, jakie zmiany w koncentracji elektronów mają miejsce np. w przypadku przewodnika z prądem spoczywającego w polu magnetycznym i przewodnika bez prądu, ale poruszającego się.
Uważny Czytelnik zapewne spostrzegł, że na początku rozwiązania wspomnieliśmy o polu elektrycznym indukowanym w przewodniku poruszającym się w polu magnetycznym, natomiast w dalszych rozważaniach o polu elektrycznym nie było wcale mowy. Dlaczego? (W razie trudności z odpowiedzią patrz *Delta* 1/1983, zadanie F 128).