Wzór ten jest punktem wyjścia do zdefiniowania pochodnej dystrybucyjnej dowolnej dystrybucji f.

Pochodną dystrybucji f nazywamy taką dystrybucję g, że dla dowolnej funkcji próbnej mamy

$$(g, \varphi) = -(f, \varphi').$$

Zamiast g piszemy dalej po prostu f'.

Znajdźmy pochodną dystrybucji Heaviside'a θ. Zgodnie z definicją

$$(\theta', \varphi) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) \doteq (\delta, \varphi).$$

Zatem w sensie dystrybucyjnym $\theta' = \delta$.

Na zakończenie wskażemy na pewne zastosowania pojęcia dystrybucji. Zastanówmy się, jak określić funkcję gęstości g związaną z punktem materialnym o masie 1. Powiedzmy, że punkt ten pokrywa się z punktem $x = 0$ na osi liczbowej $\mathbf{R}$. Rozmieścimy masę 1 równomiernie wzdłuż odcinka $(-\varepsilon, \varepsilon)$. W rezultacie otrzymamy następującą funkcję gęstości

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{dla } x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-\varepsilon, \varepsilon) \end{cases}$$

spełniającą warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Przyjmijmy na początek, że

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Funkcja g jako funkcja gęstości powinna spełniać warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Tymczasem $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x = 0$. A więc nie tędy droga.

Powiemy, że ciąg dystrybucji (f_n) jest *zbieżny słabo* do $f \in D'$, jeśli dla każdej funkcji próbnej φ

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Obliczmy teraz słabą granicę funkcji g_ε (traktowanych jako elementy D'). Granica ta istnieje i jest równa delcie Diraca. Istotnie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

W celu otrzymania pełnej gęstości należy więc obliczyć wartość delty Diraca na funkcji równej tożsamościowo jedności. Tak więc wspomniana wyżej funkcja gęstości g nie jest już zwykłą funkcją, lecz dystrybucją.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 1/1983

Marek Gałecki	- Milanówek	50,41pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	48,83pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	44,51pkt
Krzysztof Trautman	- Warszawa	40,50pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	34,95pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	34,04pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Z.	31,80pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	28,68pkt

i zadań z numeru 2/1983

Krzysztof Trautman	- Warszawa	48,41pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	39,92pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Z.	36,72pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	34,95pkt
Jacek Uryga	- Bytom	34,53pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	28,68pkt
Marian Roman	- Ełk	27,32pkt

Współczynniki trudności zadań:

43	44	45	46	47	48
2,90	2,21	2,88	3,39	2,36	2,84

Kolejnymi uczestnikami ligi, którzy weszli do Klubu 44, są panowie: M.Gałecki, Z.Bartold, D.Sowizdrzał, K.Trautman.
Reprezentują - jak widać - Wybrzeże oraz Warszawę z okolicą.

Klub 44

Zadania nr 58, 59, 60

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1983

58. Jak wiadomo, wartość funkcji wykładniczej e^x jest dla każdego x równa sumie szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Który wyraz tego szeregu jest (przy ustalonym $x > 0$) największy?

59. Jakim trójkątom ABC przysługuje własność następująca: dla każdego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta ABC można z odcinków $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ zbudować trójkąt?

60. Liczbę 24 można na dwa sposoby zapisać w postaci sumy czterech swoich różnych dzielników: $24 = 1+3+8+12 = 2+4+6+12$. Jaka jest maksymalna liczba sposobów, na które liczba naturalna może być przedstawiona jako suma czterech swoich różnych dzielników? Wskazać najmniejszą liczbę naturalną realizującą to maksimum.
Zadanie 59 przysłał nasz Czytelnik, pan Piotr Chrząstowski z Warszawy.

Przypominamy treść zadań z nr 4/1983

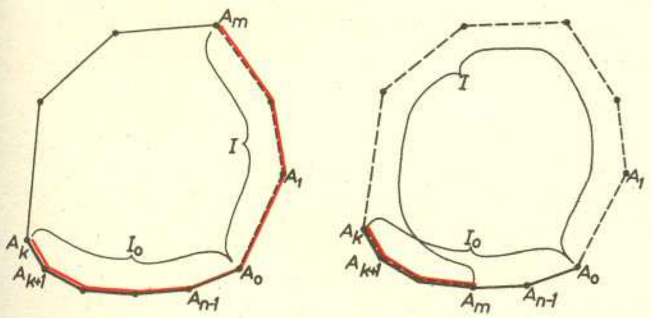
52. Na płaszczyźnie dana jest łamana zamknięta $Ł$ o n bokach. Dowieść, że można ponumerować jej wierzchołki kolejno: $A_0 \ldots A_{n-1}$ tak, by dla każdego $m < n$ było $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{m-1}A_m \geqslant \frac{m}{n} \cdot$ długość $Ł$.

53. Udowodnić zbieżność i znaleźć granicę ciągu określonego wzorem rekurencyjnym $x_1 = a+b$, $x_{n+1} = a+b-abx_n^{-1}$, $a+b \neq 0$.

54. Czy zbiór wypukły na płaszczyźnie nie zawierający żadnej półprostej musi być ograniczony? To samo dla podzbioru wypukłego przestrzeni trójwymiarowej.

Rozwiązania zadań z numeru 4/1983

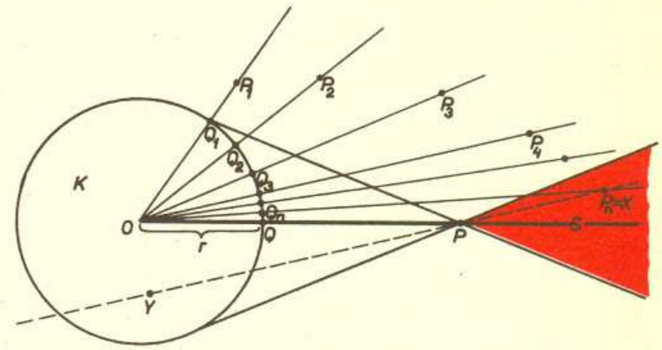
52. Dla dowolnej części J łamanej $Ł$, złożonej z m kolejnych boków (m dowolne $\leqslant n$), oznaczmy długość J przez $d(J)$ i przyjmijmy $h(J) = d(J)-(m/n)d(Ł)$. Oczywiście $h(Ł) = 0$. Niech J_o będzie taką częścią, dla której h ma wartość najmniejszą (jeśli takich części jest kilka, wybieramy dowolną z nich). Gdyby J_o było identyczne z całą łamaną $Ł$, znaczyłoby to, że h przyjmuje tylko wartości $\geqslant 0$, co jest możliwe jedynie wtedy, gdy wszystkie boki są równe. Teza jest w tym przypadku, rzecz jasna, spełniona. Odrzucając ten przypadek, możemy przyjąć, że J_o jest właściwym podzbiorem $Ł$. Oznaczmy przez A_0 jeden z końców J_o i ponumerujmy wierzchołki $Ł$ kolejno $A_0, A_1, A_2, \ldots$, wyruszając z punktu A_0 w kierunku oddalającym od J_o. Niech A_k będzie drugim końcem J_o, tak, że $J_o = \overline{A_kA_{k+1}} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_0}$.



Pokażemy, że określona przez nas numeracja spełnia zadany warunek. Załóżmy, że tak nie jest, to znaczy, istnieje m takie, że dla $J = \overline{A_0A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_{m-1}A_m}$ mamy $d(J) < (m/n)d(Ł)$, czyli $h(J) < 0$. Jeżeli $m \leqslant k$, to, jak łatwo sprawdzić, $h(J_o \cup J) = h(J_o) + h(J) < h(J_o)$, a jeżeli $m > k$, to $h(J_o \cap J) = h(J_o) + h(J) < h(J_o)$, wbrew minimalności $h(J_o)$. [Na rysunkach ilustrujących te dwie sytuacje J_o zaznaczona jest grubą linią ciągłą, a J — grubą linią przerywaną; linia kolorowa oznacza część łamanej $Ł$, dla której wartość h byłaby mniejsza, niż $h(J_o)$ — na pierwszym rysunku częścią tą jest $J_o \cup J$, a na drugim $J_o \cap J$].

53. Gdy $a \neq b$, sprawdzamy indukcyjnie, że $x_n = (a^{n+1}-b^{n+1}) \times (a^n-b^n)^{-1}$ (zatem $x_n \neq 0$, co zapewnia poprawność definicji rekurencyjnej). Ponieważ z założenia $a+b \neq 0$, więc $|a| \neq |b|$. Niech np. $|a| > |b|$ i niech $c = b/a$. Wtedy $|c| < 1$ oraz $x_n = (a-bc^n)(1-c^n)^{-1} \to a$ przy $n \to \infty$. Zatem granicą ciągu x_n jest ta z liczb a, b, która ma większy moduł. Gdy $a = b$, sprawdzamy indukcyjnie, że $x_n = a(1+1/n)$, skąd $x_n \to a$.

54. a) Niech W będzie zbiorem wypukłym na płaszczyźnie, nie zawierającym żadnej półprostej. Możemy założyć, że W nie leży na prostej (jeśli leży, to jest odcinkiem i zadanie jest trywialne). Istnieje więc w W trójka punktów niewspółliniowych, a zatem, dzięki wypukłości, W ma niepuste wnętrze: istnieje koło K o środku O i promieniu r, zawarte w W. Przypuśćmy, że zbiór W jest nieograniczony; znajdzie się więc ciąg punktów P_n ($P_n \in W$) taki, że długości odcinków $\overline{OP_n}$ dążą do nieskończoności. Niech Q_n będzie punktem półprostej $OP_n^{\rightarrow}$ położonym w odległości r od O. Z ciągu punktów Q_n można (wobec jego ograniczoności) wybrać podciąg zbieżny; można wręcz założyć, że $Q_1, Q_2, \ldots$ jest już tym podciągiem. Niech $Q = \lim Q_n$. Zgodnie z założeniem, istnieje na półprostej $OQ^{\rightarrow}$ punkt P nie należący do W. Oznaczmy



przez S sektor płaszczyzny złożony z punktów X takich, że półprosta $XP^{\rightarrow}$ przecina koło K, ale odcinek $\overline{XP}$ jest z K rozłączny (na rysunku S jest obszarem czerwonym). Ponieważ $\lim|OP_n| = \infty$, a kierunki półprostych $OP_n^{\rightarrow}$ dążą do kierunku $OP^{\rightarrow}$, przeto prawie wszystkie punkty P_n należą do S. Niech $X = P_n$ będzie jednym z tych punktów. Na mocy określenia S istnieje punkt $Y \in K \cap (XP^{\rightarrow} - \overline{XP})$. Otrzymujemy sprzeczność z wypukłością W, bowiem $X \in W$, $Y \in W$, $P \notin W$, $P \in \overline{XY}$. Przypuszczenie, że W jest zbiorem nieograniczonym, okazało się błędne.

b) Dla zbiorów wypukłych w przestrzeni odpowiedź jest taka sama. Gdy W jest zbiorem płaskim, wynika to z części a). Gdy W nie jest płaski, zawiera czwórkę punktów niewspółpłaszczyznowych, więc ma niepuste wnętrze. Dalsze rozumowanie jest dokładnym powtórzeniem rozumowania z części a), z tą jedyną różnicą, że K jest teraz kulą, zaś S stożkiem.

Uwaga. Przez oczywistą indukcję rozumowanie przenosi się na przestrzenie dowolnego wymiaru.

Zadania, których nie umiemy rozwiązać (dziś trochę z przymrużeniem oka)

1. Uprościć wyrażenie

$$\left(\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}} - \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\right) : \frac{8}{\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\right)}$$

(G. H. Chrystal, Algebra, An Elementary Textbook; A & C. Black, Ltd London 1886).

2. Gdy 86 łokci Polskich wyrównywają 97 łokciom Litewskim, 54 Litewskich idzie na 59 Rossyjskich, 32 Rossyjskich na 33 Amsterdamskie, Amsterdamskie 31 na 24 Lipskie, Lipskich 15 na 13 Berlińskich, Berlińskich 7 na 6 Wiedeńskich, łokci Polskich 454 ile uczyni Wiedeńskich?

(P. Lhulier, Arytmetyka sposobem do pojęcia łatwym ułożona ..., Paryż 1785, przekład polski 1841).