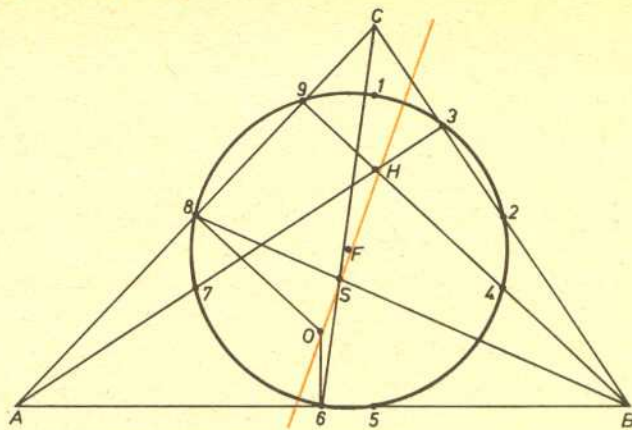


## Okrąg Feuerbacha jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt i do okręgów dopisanych

### Rozwiązanie zadania F 140.

Zasada zachowania energii wymaga, aby igła (w zależności od warunków początkowych) pozostawała w spoczynku lub obracała się ze stałą prędkością kątową. Fakt ten staje się bardziej zrozumiały, gdy rozpatrzmy jej model matematyczny, np. traktując ją jako układ dwóch monopoli (dawniej mówiono „ładunkach”). Na każdy z nich działa siła styczna do linii indukcji pola. Wektory tych sił mają równe wartości, lecz różnią się zwrotami. Ponadto równe są także ich ramiona. Zatem wypadkowa siła i wypadkowy moment siły działające na igłę muszą być równe zeru. Oczywiście do tego samego wniosku prowadzi przyjęcie innego modelu igły bądź skorzystanie z symetrii. A jak zachowałaby się igła, gdyby otwór był umieszczony niesymetrycznie, np. bliżej bieguna południowego?



Rys. 1 Okrąg Feuerbacha i prosta Eulera trójkąta

Wśród wielu ciekawych zależności, jakie można znaleźć w każdym trójkącie, warto zwrócić uwagę na *okrąg Feuerbacha* (zwany czasem okręgiem Eulera lub okręgiem dziewięciu punktów). Przechodzi on przez środki boków trójkąta, spodki jego wysokości i środki odcinków wysokości między wierzchołkami a ortocentrum  $H$  (rys. 1). Jest — jak łatwo spostrzec — obrazem jednokładnym okręgu opisanego na trójkącie; środek jednokładności jest w ortocentrum  $H$ , a skala wynosi  $1/2$ . Wynika stąd oczywiście zależność pomiędzy promieniami

$$R = 2f,$$

gdzie znaczenie  $R$  i  $f$  łatwo zgadnąć.

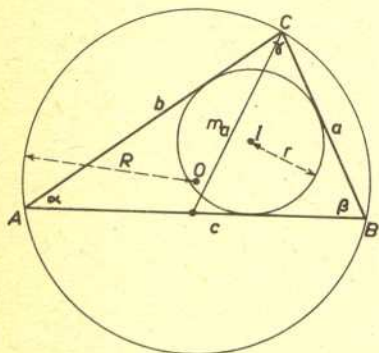
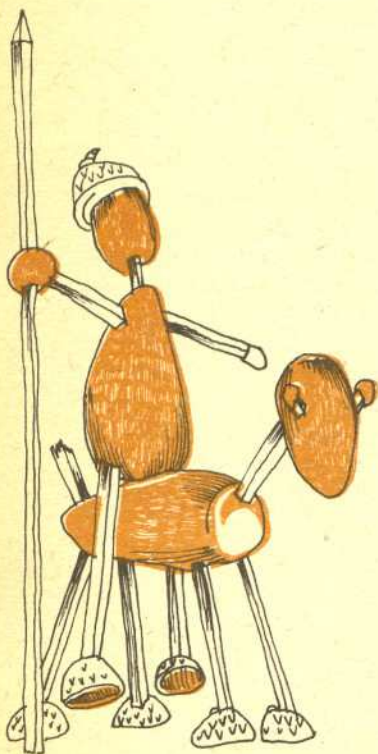
Warto też zwrócić uwagę na inną jednokładność — o środku w  $S$  (środku ciężkości trójkąta) i skali —  $1/2$ . Przeprowadza ona — jak widać z rysunku 1 — ortocentrum  $H$  na środek  $O$  okręgu opisanego. Zatem w każdym trójkącie punkty  $H, S, O$  są współliniowe (bo punkt, obraz i środek jednokładności zawsze leżą na jednej prostej); ponadto  $SH = 2OS$ . Wyznaczają one prostą (o ile tylko trójkąt nie jest równoboczny) — tzw. *prostą Eulera* (rys. 1). W połowie odcinka  $OH$  leży na niej i środek  $F$  okręgu Feuerbacha.

Autor artykułu postawił sobie dwa cele. Pierwszy: opisać ciekawą i chyba mało komu znaną własność okręgu Feuerbacha. Drugi: przedstawić kilka jej dowodów i zadać Czytelnikom pytanie (w pojęciu autora retoryczne): który jest najładniejszy? Wspomniana ciekawa własność okręgu Feuerbacha jest już wymieniona w tytule:

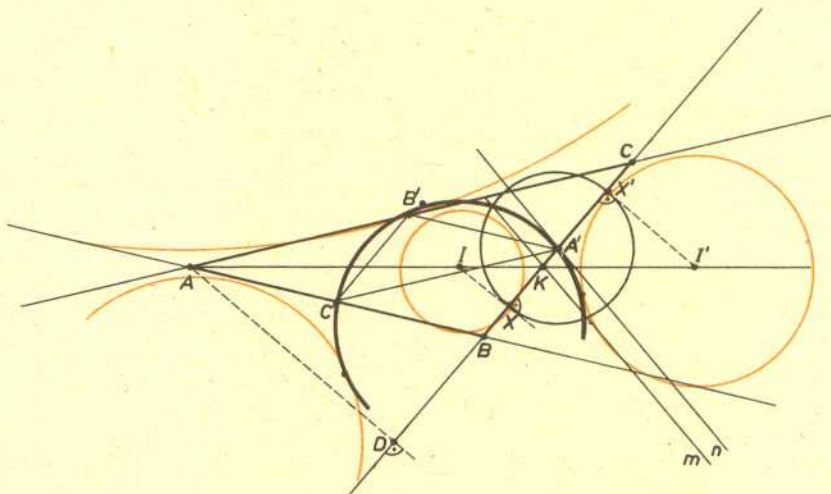
*Okrąg Feuerbacha jest styczny wewnętrznie do okręgu wpisanego w trójkąt i zewnętrznie do trzech okręgów dopisanych do trójkąta.*

\*\*\*

Tym sposobem zrealizowany został cel pierwszy; rysunki 3 i 4 ilustrują opisaną własność. Przejdźmy do dowodów. Przedstawimy je w pewnym skrócie, bardzo starając się nie nadużyć nigdzie wyświechtanego zwrotu „łatwo sprawdzić” (bo słowo musi być święte, jak śpiewał kilka lat temu Wiesław Michnikowski).



Rys. 2 Standardowe oznaczenia



Rys. 3





### Rozwiązanie zadania M 345.

Rzut czworoboku na płaszczyznę może być trójkątem lub czworokątem o wierzchołkach będących rzutami wierzchołków czworoboku. W pierwszym przypadku rzut czworoboku jest rzutem prostokątnym jednej z jego ścian, a więc jego pole jest nie większe od pola tej ściany i mamy  $S_{\text{rzutu}} \leq$

$$\leq \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad (a \text{ jest długością krawędzi czworoboku}).$$

W drugim przypadku otrzymujemy czworokąt wypukły, którego przekątnymi są rzuty dwóch krawędzi. Ze znanego wzoru  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$  (gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy przekątnymi) mamy  $S_{\text{rzutu}} \leq \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{2}$ , przy czym równość mogłaby być

osiągnięta, gdyby krawędzie, których rzuty tworzą przekątne czworokąta, były równoległe do płaszczyzny, a kąt między tymi rzutami był prosty.

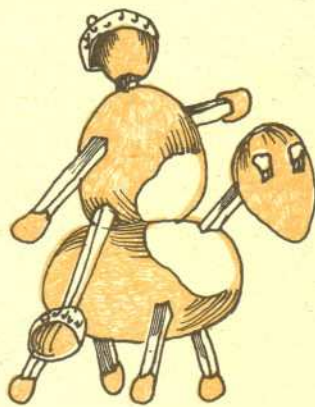
Można to osiągnąć stawiając na płaszczyźnie sześcian  $ABCD A'B'C'D'$

o krawędzi  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  i biorąc czworobok

$ACB'D'$  (wszystkie jego krawędzie są przekątnymi ścian sześcianu i mają długość  $a$ ). Jego rzut jest właśnie kwadratem  $ABCD$

o polu  $\frac{1}{2} a^2$ . Ponieważ  $\frac{a^2}{2} > \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ ,

podana konfiguracja realizuje żądane maksimum.



### Rozwiązanie zadania M 343.

Twierdzenie jest z założenia prawdziwe dla  $n = 1$ . Dla  $n = 2$  otrzymujemy

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2,$$

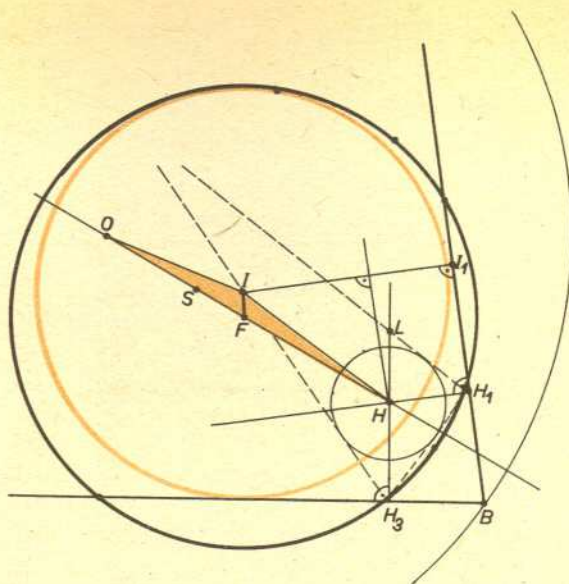
czyli też liczbę całkowitą.

Założmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla  $n = 1, 2, \dots, m-1$ , przy  $m > 2$ . Wówczas liczba

$$a^m + \frac{1}{a^m} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^{m-1} + \frac{1}{a^{m-1}}\right) - \left(a^{m-2} + \frac{1}{a^{m-2}}\right)$$

również jest całkowita, co kończy indukcyjny dowód.

(Porównaj artykuł K. Pawłowskiego w *Delcie* 2/1983).



Rys. 4

W dowodzie I skorzystamy z inwersji (patrz artykuły na str. 1 i 7).

Wygodnie będzie wprowadzić proste pojęcie. Powiemy, że współliniowe punkty  $A, B, C, D$  tworzą czwórkę harmoniczną, gdy  $BA/BC = DA/DC$ .

Skorzystamy z prawie oczywistego faktu, że rzutowanie równoległe zachowuje harmoniczną czwórkę punktów. Punkty  $A$  i  $K$  na rysunku 3 są środkami jednokładności przeprowadzających okrąg wpisany na dopisany. Stąd szybko wynika, że  $A, I, K, I'$  tworzą czwórkę harmoniczną, a więc tworzą ją także  $D, X, K, X'$  — rzuty  $A, I, K, I'$  na przedłużenie boku  $BC$ . Umiarkowanie trudno pokazuje się, że proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych połowią jego obwód; w naszym przypadku  $AC + CX' = X'B + BA$ , skąd szybko wynika, że  $XB = CX$ , tj.  $A'$  jest środkiem nie tylko  $BC$ , ale i  $XX'$ .

Dokonyjemy teraz inwersji względem okręgu o środku  $A'$  i promieniu  $A'X = A'X'$ . Okrąg Feuerbacha przechodzi przez  $A'$ , a więc odwzoruje się na prostą. Ta prosta przejdzie przez obraz inwersyjny punktu  $D$  — a więc punkt  $K$  ( $D, X, K, X'$  tworzą czwórkę harmoniczną). Dowód nasz będzie zakończony, gdy przekonamy się, że

- 1) tą prostą jest  $m$  (rys. 3),
- 2) wspomniana inwersja przekształca okrąg wpisany na ten sam okrąg i okrąg dopisany na ten sam okrąg dopisany.

Obydwa te fakty możemy zostawić Czytelnikom jako zadanie. W pierwszym z nich trzeba będzie sprawdzić, że styczną do okręgu Feuerbacha w punkcie  $A'$  jest prosta równoległa do  $m$  (rys. 3). To zaś otrzymamy z kilku równości kątów na rys. 3, a w gruncie rzeczy z tego, że  $A'C'$  jest równoległa do  $AC$ ,  $A'B'$  do  $AB$ , zaś  $B'C'$  do  $BC$ . Aby wykazać, że nasza inwersja przekształca okrąg (wpisany) w siebie, zauważmy, że jest on prostopadły do okręgu, względem którego wykonujemy inwersję. Problem sprowadzi się zatem do wykazania, że

Jeżeli dwa okręgi są prostopadłe, to inwersja względem jednego przekształca drugi w siebie.

To zaś stanie się zupełnie proste, jeżeli przypomnimy sobie jakikolwiek sposób konstruowania punktu inwersyjnego względem danego (np. Inwersja — 2).

Zakończyliśmy dowód I. W drugim będziemy korzystać tylko ze znanych lub łatwo osiągalnych w tablicach wzorów planimetrii (lista poniżej). Wszystko sobie obliczymy (autor cytuję tu swoją sześćdziesięcioletnią córkę, która odezwała się kiedyś; ty masz, tatusiu, dobry zawód, bo wszystko możesz sobie obliczyć).

Oto potrzebne wzory (oznaczenia — patrz rys. 2 i 4):

1. Dla długości środkowej boku trójkąta mamy

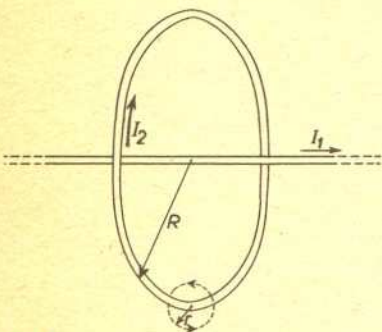
$$m_a^2 = \frac{1}{2} (b^2 + c^2) - \frac{1}{4} a^2.$$





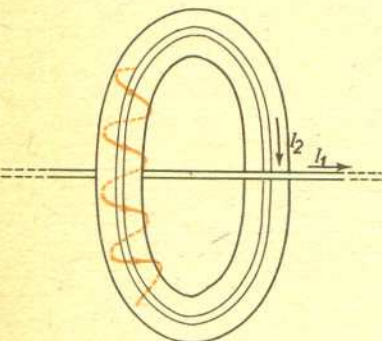
### Rozwiązanie zadania F 141.

Gdyby prąd płynął tylko w przewodniku kołowym, wtedy linie indukcji w jego najbliższym otoczeniu byłyby okręgami (patrz rys. 1), a ich zbiór dla danej wartości indukcji stanowiłby powierzchnię torusa. Wynika to z faktu, iż dla małych wartości stosunku  $r/R$  element przewodnika kołowego można traktować jako prostoliniowy.



Rys. 1

Prąd płynący w przewodzie prostoliniowym jest źródłem dodatkowego pola, którego wektory indukcji są styczne do powierzchni torusa (i prostopadłe do wektorów indukcji pola zwoju). Zgodnie z zasadą superpozycji pól indukcja pola wypadkowego jest również styczna do tej powierzchni, a jej linie tworzą linie śrubowe owijające torus (rys. 2).



Rys. 2

Przebieg linii śrubowej musi zależeć od stosunku natężeń prądów w przewodnikach. Intuicja podpowiada (i potwierdzają to obliczenia), że przy określonych stosunkach prądów linia indukcji może nie być zamknięta. Oplata wtedy dokładnie powierzchnię torusa. Czy nie jest to jednak sprzeczne z prawem Ampère'a? A jaki jest kształt linii indukcji w obszarach bardziej odległych od pętli?

2. Promień okręgu wpisanego w zależności od promienia okręgu opisanego:

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

3. Promień okręgu wpisanego w trójkąt łączący spodki wysokości trójkąta:

$$\varrho = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

$$4. BI_1 = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$5. HH_1 = 2R \cos \beta \cos \gamma.$$

6. Odległość środka okręgu opisanego od wpisanego:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

7. Odległość środka koła opisanego od ortocentrum:

$$OH^2 = R^2 - 4R\varrho, \quad \text{gdzie } \varrho \text{ jest jak w 3.}$$

$$8. IH^2 = 2r^2 - 2R\varrho.$$

Uporządkowaliśmy wzory według (subiektywnej) wzrastającej skali trudności w ich dowodzie; dowiedzimy tylko 8. Może tylko jedno zdanie na temat 7: wzór ten wynika z podobieństwa trójkąta  $HLH_1$  i  $BA'C$ , gdzie  $L \in pr. H_1 H_2 \cap pr. CH_3$ , a  $A'$  jest punktem na okręgu opisanym, położonym po przeciwnej stronie średnicy niż  $A$ .

Dowód wzoru nr 8 zaczniemy od zastosowania 3 i 4:

$$I_1 H_1 = BI_1 - BH_1 = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 2R \cos \beta \sin \gamma = p,$$

$$r - HH_1 = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 2R \cos \beta \cos \gamma = q.$$

Patrząc na trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej  $IH$  mamy  $IH^2 = p^2 + q^2$ . Podnosząc  $p$  i  $q$  do kwadratu, po długich i żmudnych obliczeniach możemy dojść stąd do zależności

$$IH^2 = 16R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} - 16R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \beta \left( \cos \frac{\beta}{2} \sin \gamma + \sin \frac{\beta}{2} \cos \gamma \right) + 4R^2 \cos^2 \beta.$$

Dalsze rachunki (standardowe przekształcenia trygonometryczne) doprowadzą do

$$IH^2 = 32R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

co na mocy 3 i 4 jest inną tylko postacią wzoru 8.

Z nagromadzonych wzorów teza wynika już bardzo prosto. Wiemy, że  $OF = FH$ , a więc  $FI$  jest środkową w trójkącie  $OHI$ . Zatem 1 daje

$$IF^2 = \frac{1}{2} (OI^2 + IH^2) - \frac{1}{4} OH^2 = \frac{1}{2} R^2 - Rr + r^2 - R\varrho - \frac{1}{4} R^2 + R\varrho = \left( \frac{1}{2} R - r \right)^2,$$

więc  $IF = \frac{1}{2} R - r$ ; a to znaczy, że odległość środków okręgu Feuerbacha i wpisanego jest równa różnicy ich promieni. Są więc one styczne wewnętrznie.

Dowód zmieni się trochę dla trójkąta rozwartokątnego, a jeszcze bardziej, gdy będziemy dowodzić, że okrąg Feuerbacha jest styczny do okręgu dopisanego. Zmiany polegać będą wprawdzie tylko na zastąpieniu niektórych znaków  $+$  przez  $-$  lub odwrotnie, ale właśnie dlatego, że niektórych — dowody trzeba będzie prześledzić od nowa.

\*\*\*

A obiecany trzeci dowód? Spróbujmy. Przypiszmy wierzchołkom trójkąta współrzędne  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ ,  $C = (x_3, y_3)$  i zabierzmy się do wyliczenia wszystkiego w tych współrzędnych. Oto wzór na współrzędne środka okręgu Feuerbacha:

$$x = \frac{(x_1^2 + y_1^2)(y_2 - y_3) + (x_2^2 + y_2^2)(y_3 - y_1) + (x_3^2 + y_3^2)(y_1 - y_2)}{2[y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)]}$$

$$y = \frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_2 - x_3) + (x_2^2 + y_2^2)(x_3 - x_1) + (x_3^2 + y_3^2)(x_1 - x_2)}{2[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]}$$

Dokończenie dowodu autor złośliwie pozostawia Czytelnikom.

dr Michał SZUREK