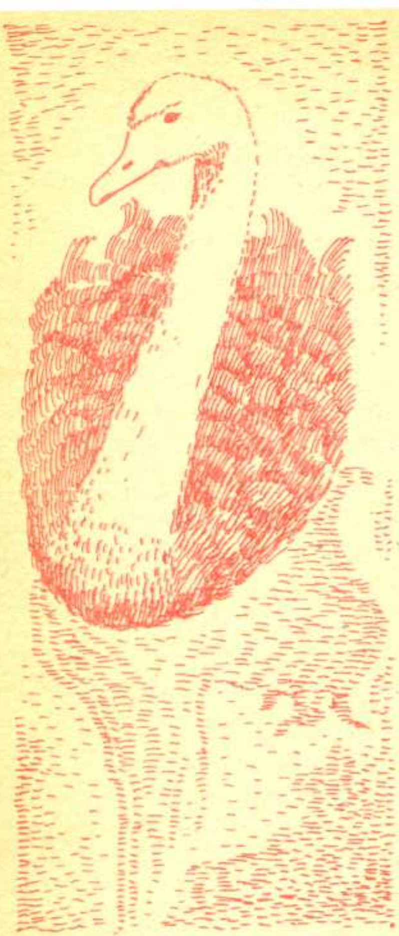


Czy każda podróż do Wenecji kończy się w Wenecji?

Mgr Piotr CHRZĄSTOWSKI

Na początek proponuję Czytelnikowi, aby spróbował obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right).$$

Cała historia zaczęła się w autobusie, który wraz ze mną i z moim kolegą, matematykiem, podążał w kierunku Wenecji. Noc już zapadła i zależało nam na czasie, gdyż nie wypadało zbyt późno przyjeżdżać do oczekujących nas gościnnych Włochów. Minęliśmy właśnie znak „Wenecja 80 km". Odruchowo spojrzałem na licznik. Szybkościomierz wskazywał 80 km/godz. Nie było jeszcze tak źle. Prędkość autobusu zaczęła jednak nieco maleć i dziesięć kilometrów dalej jechał już tylko z prędkością 70 km/godz. Wtedy to zrodziło się następujące, makabryczne zadanie:

Zadanie

Autobus ma do przejechania a kilometrów. Na x kilometrów do celu jego prędkość wynosi x km/godz.

Po jakim czasie:

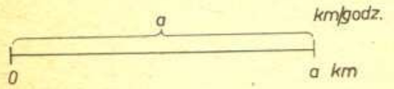
1. dojedzie do celu?

2. przebędzie połowę drogi?

Zabraliśmy się żwawo do rozwiązania, bojąc się, że nie zdążymy przed Wenecją. Tutaj, Drogi Czytelniku, przymknij oczy, wyobraź sobie, że jedziesz do Wenecji i spróbuj to zadanie rozwiązać (przynajmniej punkt **1**).

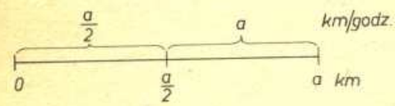
Nie jest ono w końcu takie bardzo trudne.

Wyobraźmy sobie, że coraz dokładniej przybliżamy ciągłe hamowanie autobusu w następujący sposób:



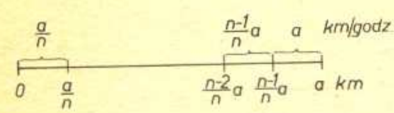
Pierwsze przybliżenie: Jedziemy całą drogę z prędkością a km/godz., co nam zajmie jedną godzinę.

$$H_1 = 1.$$



Drugie przybliżenie: Jedziemy pierwszą połowę drogi ze stałą prędkością a km/godz, a potem przypominamy sobie o założeniach i w połowie drogi zwalniamy nagle do $\frac{a}{2}$ km/godz i dojeżdżamy z tą prędkością już do końca.

Czas, jaki nam to zajmie, wyniesie $H_2 = \frac{a}{2}\Big/a+\frac{a}{2}\Big/\frac{a}{2} = \frac{1}{2}+1.$



n-te przybliżenie: zaczynamy od prędkości a km/godz i co $\frac{1}{n}$ drogi zmniejszamy naszą prędkość o $\frac{a}{n}$ km/godz.

$$H_n = \frac{a}{n}\Big/a+\frac{a}{n}\Big/\frac{(n-1)a}{n}+\ldots+\frac{a}{n}\Big/\frac{a}{n} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1.$$

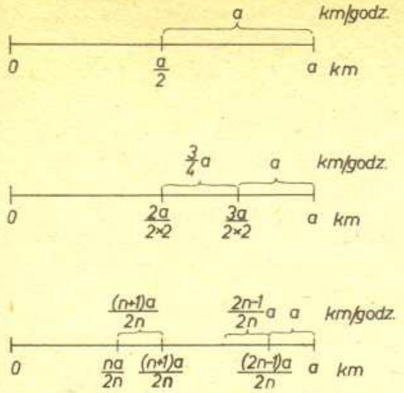
Im na więcej części podzielimy nasz odcinek $[0, a]$, tym dokładniej skokowy ruch autobusu będzie przypominał rzeczywisty. Przy $n\to\infty$, H_n będzie dążyło do rzeczywistego czasu H.

Niestety jednak $$\lim_{n\to\infty} H_n = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} = \infty,$$

$$\sum_{i=2}^{2^n}\frac{1}{i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{1}{k} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}\frac{1}{2^j} = \frac{n}{2}$$

czyli przy $n\to\infty$ czas H_n dąży do nieskończoności. Gdyby tak dalej poszło, to nigdy nie dojechalibyśmy do Wenecji. Makabra!

Jest to zresztą oczywiste, gdyż kierowca porównując licznik ze słupkami milowymi w dowolnym momencie myśli sobie: „No to jeszcze godzinka i będziemy na miejscu". Ta jego świadomość jest niezmiennicza względem czasu!



Połowę drogi jednak już na pewno osiągniemy. Aby wyznaczyć czas na to potrzebny, spróbujmy użyć tej samej metody:

$$T_1 = \frac{a}{2}\Big/ a = \frac{1}{2},$$

$$T_2 = \frac{a}{4}\Big/\frac{3a}{4} + \frac{a}{4}\Big/ a = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_n = \frac{a}{2n}\Big/\frac{(n+1)a}{2n} + \ldots + \frac{a}{2n}\Big/\frac{(2n-1)a}{2n} + \frac{a}{2n}\Big/\frac{2na}{2n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}.$$

Czas T potrzebny na przebycie pierwszej połowy drogi jest, podobnie jak w pierwszym przypadku granicą $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$. Granicę tę oczywiście da się jakoś tam w miarę normalnie policzyć. My jednak użyjemy armaty na komara i zabijemy go bezlitośnie. Rozwiążemy nasze zadanie uciekając się do równań różniczkowych.

Wyrazimy położenie x w zależności od czasu t, który upłynął od chwili $t = 0$, gdy znajdowaliśmy się w punkcie a. Prędkość $v(t)$ w punkcie $x(t)$ wynosi $-x$ (minus, gdyż jest skierowana przeciwnie do wzrostu argumentu).

Otrzymujemy zatem równanie różniczkowe

(*) $$\frac{dx}{dt} = -x \text{ z warunkiem początkowym } x(0) = a.$$

Rozdzielamy zmienne i całkujemy:

$$\frac{dx}{x} = -dt, \qquad \ln x = -t + C.$$

Wyznaczamy teraz stałą C (z warunku początkowego)

$$\ln a = -0 + C, \quad \text{czyli} \quad C = \ln a.$$

Rozwiązanie zadania M 348.
Transpozycję $(k, k+1)$ możemy przedstawić jako $c^{k-1} \circ t \circ c^{n+1-k}$. Możemy więc ze złożeń cyklu c i transpozycji t odtworzyć wszystkie transpozycje $(1, 2), \ldots (n-1, n)$, a więc, w myśl tezy zadania **M 346**, wszystkie permutacje.

Zarówno a, jak i x są dodatnie, więc nie ma kłopotów ze znakami, ostatecznie mamy

$$x = a \cdot e^{-t} \quad \text{lub co będzie dla nas wygodniejsze,}$$

$$t = \ln\frac{a}{x}.$$

Sprawdzamy szybko, że istotnie $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\frac{a}{x} = \infty$ i zabieramy się za drugą połowę zadania bez najmniejszego trudu

$$t\left(\frac{a}{2}\right) = \ln\left(a\Big/\frac{a}{2}\right) = \ln 2.$$

Ciekawostka: wynik zupełnie nie zależy od a. Niezależnie od tego, czy lecimy ze Słońca na Ziemię, czy przesuwamy ołówkiem po papierze według wzoru (*), zawsze przebycie połowy drogi zajmie nam tyle samo czasu (przy pominięciu efektów relatywistycznych!).

Rozwiązanie zadania F 142.
Ładunek wprowadzony na przyrząd gromadzi się głównie na końcach listków. Odpychanie tych ładunków napina listki i ustawia je wzdłuż normalnych do przewodnika kulistego, czyli tak, jak biegłyby linie natężeń pola przewodnika bez pasków cynfolii. Potencjał sfery i listków jest stały (o ile można zaniedbać spływanie ładunków do otoczenia), a rzeczywiście istniejące pole jest dużo bardziej skomplikowane niż dla przewodnika kulistego. Linie natężeń tego pola są oczywiście prostopadłe do powierzchni pasków i przewodnika. Warto zastanowić się nad orientacyjnym przebiegiem tych linii.

Czyli ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2.$$

Morał: Trudne do przewidzenia są korzyści wynikające z podróży do Wenecji.

I na zakończenie pytanie: czy Czytelnik potrafi podać przykład innego ruchu, niż opisany równaniem (*), za pomocą którego możemy dowolnie blisko zbliżyć się do celu, ale samego celu nigdy nie osiągnąć?