

Przypominamy:

Każdy, kto nadesłanie pod adresem redakcji rozwiązanie wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — większą — z naklejonym znacznikiem, otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.

Mizar MSE (7)

W dotychczas przedstawianych dowodach wszędzie tam, gdzie krok dowodowy wymagał uzasadnienia, używaliśmy powołań na przesłanki (*by*, *then*, *hence*), gdyż to wystarczało. Czasem jednak jakiegoś faktu pomocniczego — takiego małego „lematu” — tą drogą nie można uzasadnić, bo albo nie wiemy jak tego dokonać, albo moduł sprawdzający Mizara (*checker*) i tak by tego nie zaakceptował. Cóż wtedy? Oczywiście, należy zbudować dowód dla takiego faktu.

Mizar MSE pozwala na budowanie dowodów wewnątrz innych dowodów. Zasady konstruowania tych wewnętrznych są takie same jak dowodów głównych. Objasnijmy to na następującym, sztucznym przykładzie, gdzie teza jest koniunkcją dwu faktów, których mogliśmy dowodzić oddzielnie.

```
(FOR X EX Y ST NWCX,YJ & X<>Y) & (FOR X EX Y ST NWCY,XJ & X<>Y)
PROOF
  THUS FOR X EX Y ST NWCX,YJ & X<>Y
    PROOF LET X* BE ULAMEK*
      CONSIDER Y* SUCH THAT
        A** = X*<>Y* & NWCX*,Y*J BY NIEDGRANICZONOSC*
        THUS EX Y ST NWCX*,Y*J & X*<>Y BY A**
      END*
    THUS FOR X EX Y ST NWCY,XJ & X<>Y
      PROOF LET X* BE ULAMEK*
        CONSIDER Y* SUCH THAT
          A** = X*<>Y* & NWCY*,X*J BY NIEDGRANICZONOSC*
          THUS EX Y ST NWCY*,X*J & X*<>Y BY A**
        END*
      END*
    END*
  END*
```

Dowodzoną tezę wyjściową wykazaliśmy w dowodzie przez kolejne konkluzje obu jej członów (które zrobiliśmy w „ciemno”), przy czym dla każdej z nich przedstawiliśmy dowód. Oczywiście w dowodach wewnętrznych możemy używać symbolu *thesis*, który w tym przypadku odnosi się do tezy tego wewnętrznego dowodu. Znaczenie *thesis* dowodu głównego żyje wtedy swoim odrębnym życiem (nie zmienia się). Co więcej, w naszym przykładzie drugi wewnętrzny dowód możemy wyeliminować pisząc go jako fragment dowodu głównego. Mamy bowiem wtedy udowodnić po prostu drugi z członów wyjściowej koniunkcji, co po pierwszej konkluzji jest właśnie treścią *thesis* w dowodzie głównym. Popatrzmy.

```
(FOR X EX Y ST NWCX,YJ & X<>Y) & (FOR X EX Y ST NWCY,XJ & X<>Y)
PROOF
  THUS FOR X EX Y ST NWCX,YJ & X<>Y
    PROOF LET X* BE ULAMEK*
      CONSIDER Y* SUCH THAT
        A** = X*<>Y* & NWCX*,Y*J BY NIEDGRANICZONOSC*
        THUS THESIS BY A**
      END*
    LET X* BE ULAMEK*
      CONSIDER Y* SUCH THAT
        A** = X*<>Y* & NWCY*,X*J BY NIEDGRANICZONOSC*
        THUS THESIS BY A**
      END*
    END*
  END*
```

Podkreślmy jeszcze raz, że dwukrotne wystąpienie *thesis* za każdym razem odnosiło się do innego dowodu i znaczyło co innego. W następującym przykładzie również wielokrotnie posłużymy się symbolem *thesis*, i choć tym razem w każdym przypadku oznaczać będzie ono takie same zdanie, to w dwu przypadkach z innych powodów niż w trzech pozostałych. Dowiedzmy, że dla dowolnych dwu ułamków istnieje ułamek niemniejszy od każdego z nich.

```
FOR X,Y EX Z ST NWCX,ZJ & NWCY,ZJ
PROOF LET X*,Y* BE ULAMEK*
A = NWCX*,Y*J IMPLIES THESIS
PROOF
  ASSUME NWCX*,Y*J
  THEN NWCX*,Y*J & NWCY*,Y*J BY ZWROTNOSC*
  HENCE THESIS
END*
NWCY*,X*J IMPLIES THESIS
PROOF
  ASSUME B = NWCY*,X*J
  NWCX*,X*J BY ZWROTNOSC*
  HENCE THESIS BY B
END*
HENCE THESIS BY A,SPOJNOSC
END*
```

Jest to dość typowy sposób korzystania z przesłanki będącej alternatywą (tutaj otrzymywanej niejawnie z aksjomatu spójności). Pokazujemy wtedy, że dowodzona teza wynika tak z jednego, jak i drugiego jej członu. Gdyby alternatywa miała więcej członów, to musielibyśmy oczywiście zrobić to dla każdego jej składnika.

Stosowanie dowodów wewnętrznych jest wygodne przy dowodzeniu tez zawierających spójnik zdaniowy równoważności (*iff*). W Mizarze MSE takiej tezy musimy dowodzić wykazując, że zachodzi koniunkcja dwu implikacji; mianowicie, że pierwszy człon równoważności implikuje drugi, oraz że drugi jej człon implikuje pierwszy. Spójrzmy na prosty przykład

```
FOR X,Y HOLDS NWCX,YJ & X<>Y IFF NOT NWCY,XJ
PROOF LET X*,Y* BE ULAMEK*
  THUS NWCX*,Y*J & X*<>Y* IMPLIES NOT NWCY*,X*J BY ANTYSYMETRIA*
  THUS NOT NWCY*,X*J IMPLIES NWCX*,Y*J & X*<>Y*
  BY SPOJNOSC,ANTYSYMETRIA
END*
```

Kolejność wykazywania tych implikacji jest istotna i musi być taka jak wyżej. Jest to wymóg checkera. W tym prostym przykładzie obyliśmy się jeszcze bez dowodu wewnętrznego, ale w następnym użyjemy dowodu zagnieżdżonego dwukrotnie.

```
FOR X,Y HOLDS
(EX Z ST NWCX,ZJ & NWCZ,YJ & X<>Z & Z<>Y) IFF (X<>Y & NWCX,YJ)
PROOF LET X*,Y* BE ULAMEK*
  THUS (EX Z ST NWCX,ZJ & NWCZ,YJ & X<>Z & Z<>Y)
    IMPLIES (X<>Y & NWCX,YJ)
  PROOF
    GIVEN Z SUCH THAT
      A = NWCX,ZJ AND B = NWCZ,YJ AND C = X<>Z AND Z<>Y
      THUS X<>Y
      PROOF ASSUME X=Y THEN NWCX,ZJ & NWCZ,XJ BY A,B*
      THEN Z=X BY ANTYSYMETRIA*
      HENCE CONTRADICTION BY C
      END*
    THUS NWCX,YJ BY PRZECHODNOSC,A,B
  END*
  THUS THESIS BY GESTOSC
END*
```

W tym przykładzie *thesis* oznaczało właśnie tę drugą implikację wymaganą do dowodu równoważności (bo pierwsza, już dowiedziona, była przedmiotem częściowej konkluzji).

W następnym odcinku pokażemy, jak można eliminować dowody przez pewną konstrukcję, będącą w wielu przypadkach odpowiednikiem dowodu, choć bez jawnego napisania, jakiej tezy dowodzimy.

```
MIEDZY: FOR X,Y,Z HOLDS MCX,Y,ZJ IFF NWCX,YJ & NWCY,ZJ
```

Zadania. Rozszerzmy nasz wstęp dotyczący ułamków o następujący aksjomat (będący w istocie definicją predykatu M — „leżenia między”).

Proszę teraz udowodnić następujące tezy:

```
T20: FOR X,Y HOLDS X<>Y IFF (NOT NWCX,YJ OR NOT NWCY,XJ)
T21: FOR X,Y,Z,X* ST MCX,Y,ZJ & MCX*,Y*,ZJ HOLDS MCX,X*,ZJ
T22: FOR X,Y,Z,X*,Y* ST MCX*,X*,Y*J & MCY*,Y*,ZJ
      HOLDS MCX*,Y*,ZJ & MCX*,Y*,Y*J
```