

Mgr Anna ZDUNIK

Wyobraźmy sobie, że obserwujemy pewien układ, który podlega zmianom w czasie. Stany naszego układu utożsamiamy z punktami przestrzeni metrycznej X , przy czym stan w chwili następczej zależy tylko od stanu w chwili poprzedniej. Oznacza to, że istnieje przekształcenie $f: X \rightarrow X$, które mówi nam, że jeśli w chwili i układ znajdował się w stanie x , to w chwili $(i+1)$ będzie w stanie $f(x)$. Znając więc sytuację w chwili początkowej oraz regułę przechodzenia od stanu do stanu (opisaną przez f) umiemy wyznaczyć tzw. trajektorię $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ punktu x odpowiadającą kolejnym stanom naszego układu:

$$x_0 = x, \quad x_{i+1} = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Naturalne jest pytanie o zachowanie trajektorii: czy są one zupełnie chaotyczne, czy może rządzą nimi pewien porządek? Czy trajektorie bliskich punktów są podobne? Ile jest trajektorii okresowych (to znaczy takich, że $x_0 = x_n$ dla pewnego n)? Odpowiedź na takie pytania bywa bardzo trudna nawet w przypadku tak prostej przestrzeni jak odcinek $[0, 1]$ i tak nieskomplikowanych przekształceń jak funkcja kwadratowa.

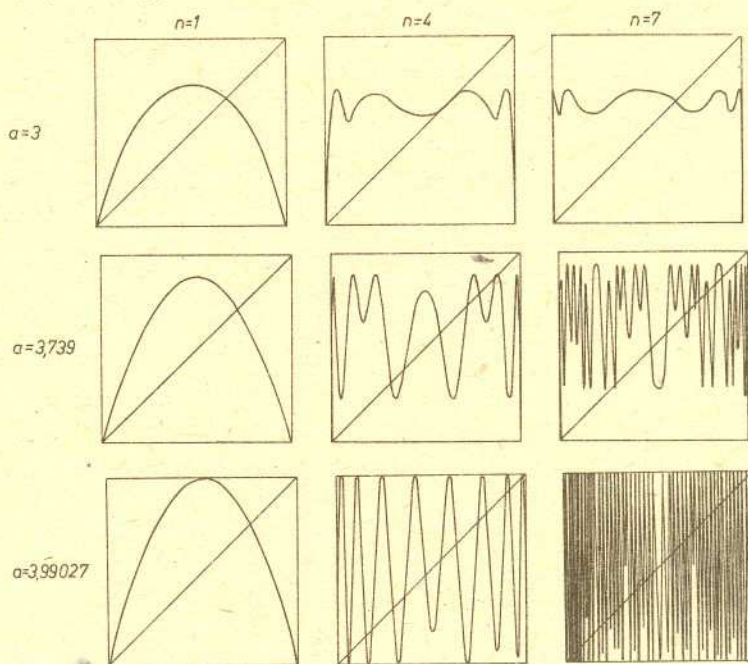
Rozpatrzmy rodzinę takich właśnie przekształceń:

$$f_a(x) = ax(1-x), \quad \text{gdzie } a \in [0, 4].$$

Dla naszych celów wygodne będzie rozpatrywanie funkcji złożonej wielokrotnie z sobą samą; wprowadźmy więc oznaczenie:

$$f^n(x) = f \circ f \circ \dots \circ f \text{ (} n \text{ razy).}$$

Odtąd f^n będziemy nazywać n -tą iteracją funkcji f . Zatem $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ jest trajektorią punktu x_0 wyznaczoną przez $f \Leftrightarrow f^i(x_0) = x_i$ dla każdego $i = 0, 1, 2, \dots$



Rys. 1. Oto wykresy przekształceń (i kilku ich iteracji) dla różnych wartości a .

Wszystkie funkcje z naszej rodziny mają po dwa odcinki monotoniczności i wszystkie mają maksimum w punkcie $c = \frac{1}{2}$. Wykresy wyglądają podobnie (różnią się tylko „wysokością”), ale już wykresy kolejnych iteracji są bardzo różne dla różnych wartości a . Opiszemy kilka skrajnych przypadków, aby zrozumieć co się właściwie dzieje.

Sytuacja jest najprostsza, gdy a jest nie większe niż 1. Wówczas (Czytelniku przekonaj się!) wykres f^n ma tylko dwa odcinki monotoniczności dla każdego n . Punkt $p = 0$ jest stały dla naszego przekształcenia ($f_a(p) = p$), ponadto

$$f'_a(p) = a - 2ap = a < 1, \text{ więc } p \text{ jest ściekiem.}$$

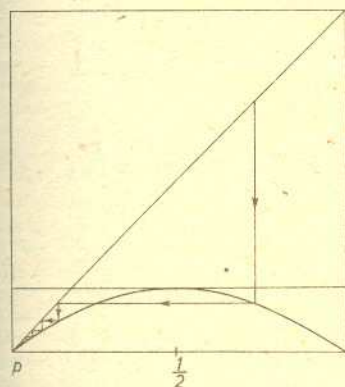
W tym przypadku z wklęsłości funkcji f_a wynika, że cały odcinek $[0, 1]$ jest przyciągany do punktu $p = 0$, to znaczy dla każdego $x \in [0, 1]$ trajektoria x dąży do p .



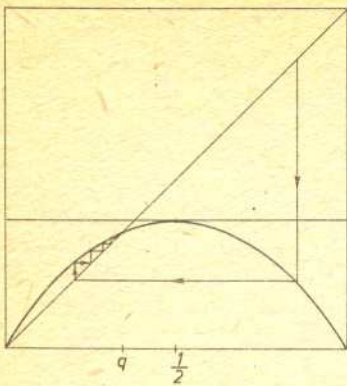
Niech $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ będzie klasy C^1 , a $p \in [0,1]$ — punktem okresowym o okresie n dla f (tzn. $f^n(p) = p$). Jeśli $|(f^n)'(p)| < 1$, to p nazywamy punktem przyciągającym albo ściekiem. Jeśli $|(f^n)'(p)| > 1$, to mówimy, że p jest odpychający.

Ściek ma zawsze otoczenie złożone z punktów x , dla których ciąg $(f^{nk})(x)$ jest zbieżny do p , gdy $k \rightarrow \infty$ (sprawdź!).

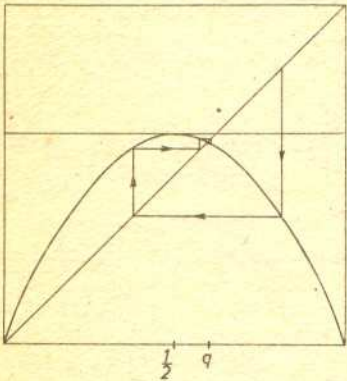
Oto przepis na wyznaczenie trajektorii punktu: Narysuj kwadrat o boku 1 i wewnątrz niego wykres naszego przekształcenia f_a . Zaznacz w kwadracie przekątną $y = x$. Wybierz punkt (x_0, x_0) na przekątnej, narysuj linię pionową przechodzącą przez ten punkt aż do przecięcia wykresu. Z punktu przecięcia narysuj linię poziomą aż do przecięcia przekątnej w jakimś punkcie (x_1, x_1) (wtedy $x_1 = f_a(x_0)$). Tak samo wyznacz $x_2 = f_a(x_1)$, x_3, \dots itd.



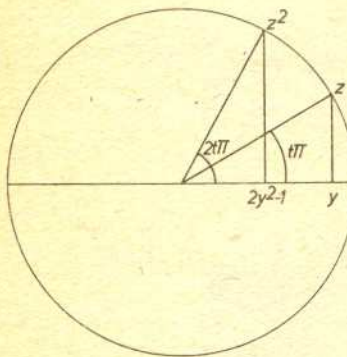
Rys. 2. $a = \frac{3}{4}$. Wszystkie trajektorie są zbieżne do $p = 0$.



Rys. 3. $a = \frac{3}{2}$. Punkt stały $q = \frac{1}{3}$ przyciąga wszystkie punkty z odcinka $(0, 1)$.

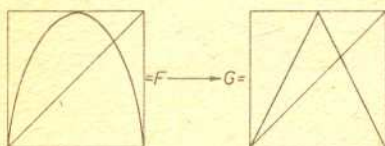


Rys. 4. $a = \frac{5}{2}$. Punkt stały $q = \frac{3}{5}$ przyciąga wszystkie punkty z odcinka $(0, 1)$.



Rys. 5. Rysunek pomocny przy rozwiązywaniu zadania

$$\begin{aligned} y &= 1 - 2x, \\ z &= y + i\sqrt{1-y^2}, \\ z^2 &= (2y^2 - 1) + 2iy\sqrt{1-y^2}, \\ \text{re } z^2 &= 2y^2 - 1. \end{aligned}$$



Rys. 6. Wykres funkcji F przed i po zamianie zmiennych.

Gdy a jest większe niż 1 (ale mniejsze niż 2), punkt $p = 0$ staje się odpychający, ale wewnątrz odcinka pojawia się nowy punkt stały przyciągający $q_a < \frac{1}{2}$. Również w tym przypadku

przekształcenie f_a ma tylko dwa odcinki monotoniczności i dla każdego $x_0 \in (0, 1)$ ciąg $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ jest zbieżny do q_a . W granicznym przypadku punkt q_a pokrywa się z c . Gdy a dalej rośnie, sytuacja zaczyna się trochę komplikować, bo wykresy kolejnych iteracji f_a mają już teraz więcej niż po dwa odcinki monotoniczności (dlaczego?).

Okazuje się jednak, że punkt q_a nie znika przy przejściu przez graniczną wartość $a = 2$, a jedynie „przenosi się” na drugą stronę c i pozostaje przyciągający. Nietrudno przekonać się (na przykład rysując trajektorie), że także w tym przypadku wszystkie punkty z odcinka $(0, 1)$ są przyciągane przez q_a . Ta dobra sytuacja kończy się, gdy a przekracza wartość 3 (wówczas punkt q_a staje się odpychający, a trajektorie punktów — bardziej skomplikowane).

Podsumujmy nasze dotychczasowe rozważania. W opisanych dotąd przypadkach przekształcenie f_a miało zawsze ścieżkę, który przyciągał wszystkie punkty z wnętrza odcinka. Oczywiście, nie było żadnych innych trajektorii okresowych w $(0, 1)$. Sytuacja jest więc niezwykle jasna: jakkolwiek byłby punkt początkowy $x_0 \in (0, 1)$, stan układu dąży do pewnego stanu „równowagi”. Przyszłość jest więc w pełni przesądzona z góry, w ogóle nie zależy od terażniejszości.

Ale już przejście przez wartość parametru $a = 3$ wprowadza do naszego obrazka bałagan. Jak wielki może on być — przekonamy się za chwilę badając „ostatnie” przekształcenie naszej rodziny: f_4 . Przyjmijmy dla prostoty oznaczenie $F(x) = f_4(x)$.

Na początek — zadanie: określamy przekształcenie $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ wzorem

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \arccos(1-2x), \text{ wówczas } \varphi \text{ jest ciągłe i wzajemnie jednoznaczne, } \varphi^{-1} \text{ jest ciągłe,}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ oraz}$$

$$G(t) = (\varphi \circ F \circ \varphi^{-1})(t) = \begin{cases} 2t & t < \frac{1}{2} \\ 2-2t & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Co nam daje przekształcenie φ ? Pozwala zapisać F w nowych zmiennych (t) i zmienić kształt wykresu na przyjemniejszy. Zamiast badać trajektorie wyznaczone przez F zajmiemy się trajektoriami wyznaczonymi przez G , co okaże się znacznie prostsze.

Wybermy taki punkt $x_0 \in [0, 1]$, że dla każdego $n \geq 0$ $G^n(x_0) \neq \frac{1}{2}$ i niech $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ będzie trajektorią wyznaczoną przez G . Punktowi x_0 przyporządkujemy ciąg znaków $(a_i(x_0))_{i=0}^{\infty}$, gdzie $a_i = 0$ lub 1 według zasady:

$$a_i = 0, \text{ jeśli } x_i \text{ leży na lewo od punktu } \frac{1}{2},$$

$$a_i = 1, \text{ jeśli } x_i \text{ leży na prawo od punktu } \frac{1}{2}.$$

Ponieważ G (podobnie jak F) przeprowadza odcinek $[0, 1]$ w sposób ciągły na $[0, 1]$, możemy sformułować następujące lematy:

Lemat 1. Dla każdego ciągu $(A_i)_{i=0}^{\infty}$ złożonego z zer i jedynek istnieje taki punkt $x_0 \in [0, 1]$, że $(a_i(x_0))_{i=0}^{\infty} = (A_i)_{i=0}^{\infty}$.

Lemat 2. Dla takiego punktu $x_0 \in [0, 1]$, że ciąg $(a_i(x_0))_{i=0}^{\infty}$ jest określony, definiujemy zbiór

$$I_n(x_0) = \{x \in [0, 1]: a_i(x) = a_i(x_0) \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n\}.$$

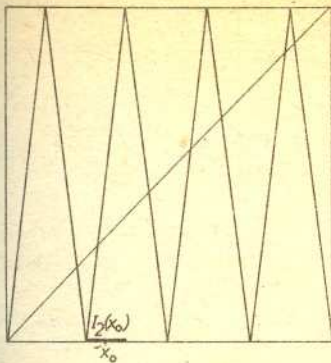
Wówczas zbiór $I_n(x_0)$ jest odcinkiem o długości $\frac{1}{2^{n+1}}$. Jeśli c, d są końcami tego odcinka, to albo

$$G^n(c) = \frac{1}{2}, \text{ albo } G^n(d) = \frac{1}{2}.$$

Dowody (nietrudne) obu lematów zostawiam czytelnikom. Możemy udowodnić teraz

Twierdzenie. W dowolnie krótkim odcinku otwartym zawartym w $[0, 1]$ znajduje się punkt, którego trajektoria wyznaczona przez G zawiera punkt $\frac{1}{2}$ (to znaczy: przeciwobrazy punktu

$\frac{1}{2}$ są gęste w $[0, 1]$).



Rys. 7. Wykres przekształcenia G^3 . $I_2(x_0)$ jest odcinkiem monotoniczności dla G^3 . Ogólnie: $I_n(x_0)$ jest odcinkiem monotoniczności dla G^{n+1} .

A oto wniosek z powyższego twierdzenia.

Dla dowolnego $x \in [0, 1]$ przeciwobrazy x (czyli takie punkty, których trajektoria zawiera x) są gęste w odcinku $[0, 1]$.

Dowód twierdzenia: Weźmy odcinek $(a, b) \subset [0, 1]$ i podzielmy go na trzy równe części punktami r, s ($a < r < s < b$). W odcinku $[r, s]$ istnieje punkt x_0 , dla którego ciąg $(a_i(x_0))_{i=0}^{\infty}$ jest określony (dlaczego?). Weźmy takie n , aby $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{b-a}{3}$. Wówczas odcinek $I_n(x_0)$ jest zawarty w (a, b) . Z lematu 2 wynika, że przynajmniej jeden jego koniec ma trajektorię przechodzącą przez punkt $\frac{1}{2}$. Znaleźliśmy więc przeciwobraz punktu $\frac{1}{2}$ w odcinku (a, b) .

Dowód wniosku przebiega zupełnie podobnie, trzeba tylko pamiętać, że $I_n(x_0)$ jest jednym z odcinków monotoniczności dla G^{n+1} i że obrazem (przy przekształceniu G^{n+1}) każdego odcinka monotoniczności jest cały odcinek $[0, 1]$.

Wreszcie możemy zacząć czerpać korzyści z naszej pracy i przypomnieć sobie o właściwym obiekcie naszych zainteresowań — o funkcji F . Pokażemy, że dla F tezy twierdzenia i wniosku też są prawdziwe. Istotnie, weźmy dowolny odcinek otwarty $(a', b') \subset [0, 1]$. Funkcja φ przekształca (a', b') na pewien odcinek (a, b) . Z twierdzenia wiemy, że istnieje takie $z \in (a, b)$, że $G^n(z) = \frac{1}{2}$ dla pewnego n . Wówczas

$$F^n(\varphi^{-1}(z)) = \varphi^{-1}(G^n(z)) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $\varphi^{-1}(z) \in (a', b')$, więc znaleźliśmy przeciwobraz punktu $\frac{1}{2}$ w odcinku (a', b') .

Wniosek otrzymujemy podobnie, znowu posługując się zamianą zmiennych φ .

Uzyskaliśmy więc pełny opis trajektorii wyznaczonych przez F . Punkt, którego trajektoria nie zawiera punktu $\frac{1}{2}$, odpowiada pewnemu ciągowi $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ zer i jedynek (i na odwrót). Ponadto punkty, których trajektorie zawierają $\frac{1}{2}$, są gęste w odcinku $[0, 1]$ (w poprzednio rozpatrywanych przypadkach tak oczywiście nie było — dlaczego?).

Sytuacja jest całkiem inna niż poprzednio. Łatwo na przykład zauważyć prawdziwość następującego faktu: dla dowolnie krótkiego odcinka otwartego $J \subset [0, 1]$ istnieją takie $n \in \mathbb{N}$ oraz punkty $x, y \in J$, że

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \frac{1}{2}.$$

Mówiąc obrazowo: trajektorie dowolnie bliskich punktów „rozejdą się” po pewnym czasie. Przyszłość układu zależy bardzo mocno od stanu początkowego x_0 . Wystarczy zaburzyć go odrobinę, a historia potoczy się zupełnie inaczej...

Opisane tu przypadki należą do najprostszych i jednocześnie pokazują dwie skrajne sytuacje, jakie mogą tu mieć miejsce.

Dla pośrednich wartości parametru a otrzymuje się w pewnym sensie „stany pośrednie”. Może się więc zdarzyć, że przekształcenie f_a ma ściek i wówczas trajektorie prawie wszystkich (w sensie miary) punktów dążą do tego ścieku. W pozostałych przypadkach prawdziwa jest teza naszego twierdzenia (choć dowód jest dużo trudniejszy).

Wielu problemów związanych z przekształceniami tej rodziny nie umiemy dotąd rozwiązać. Te niewinne funkcje okazują się bowiem bardzo odporne przy próbach szczegółowego badania.

W szczególności proste pytanie: „czy zbiór tych parametrów a , dla których f_a ma ściek, jest gęsty w odcinku $[0, 4]$?” wciąż czeka na odpowiedź.

We wstępie odwoływaliśmy się do wymyślanego „układu fizycznego”. Warto więc wyjaśnić, że przekształcenia tego typu rzeczywiście służą w ekologii jako model opisujący wzrost liczebności populacji pewnych owadów. Natura matematyczna takich przekształceń jest jednak na tyle frapująca, że warto się nimi zajmować, nawet gdyby nic „rzeczywistego” nie oznaczały.



Rozwiązanie zadania F 154. Klucz ześlizguje się z pręta wahając się równocześnie. Gdy pręt zaczyna się obracać, prędkość względna punktu zetknięcia klucza jest prostopadła do osi podłużnej pręta, podobnie jak przeciwnie skierowana siła tarcia kinetycznego. W kierunku prostopadłym do prędkości tarcie statyczne znika (patrz zad. F120 w *Delecie* 8/1982) i klucz rozpoczyna ześlizgiwanie się. Pojawia się wtedy składowa siły tarcia kinetycznego wzdłuż pręta, która hamuje ten ruch. Płynność lub „skokowość” ześlizgiwania się klucza zależy od wartości prędkości kątowej pręta. Drgania poprzeczne wzbudza już w pierwszej chwili ruchu wspomniana wyżej siła tarcia statycznego. Jest to bardzo uproszczony opis. Aby się o tym przekonać, proponujemy Czytelnikom zastanowić się, jak zmieniają się siły działające na klucz podczas bardzo powolnego narastania momentu obrotowego przykadanego do pręta.