ROZPOCZNIJ CZYTANIE OD SZESNASTEJ STRONY

Twierdzenie Hadwigera wynika z lematu

Lemat. Jeśli wielościan W daje się rozłożyć na wielościany $W_1, \ldots, W_n$; M jest zbiorem zawierającym liczbę π i wszystkie kąty dwuścienne wielościanów $W, W_1, \ldots, W_n$; f jest taką addytywną funkcją określoną na M, że $f(\pi) = 0$, to

$$(*) \qquad f(W) = f(W_1) + \ldots + f(W_n).$$

Na krawędziach wielościanu W oraz wielościanów $W_1, \ldots, W_n$ zaznaczmy wszystkie wierzchołki tych wielościanów oraz punkty, w których przecinają się krawędzie (rys. 8). Każda krawędź zostanie podzielona na drobniejsze odcinki. Nazwijmy je ogniwami. Tak więc każda krawędź każdego z wielościanów składa się z jednego lub więcej ogniw. Dla ogniwa zawartego w krawędzi wielościanu W określamy jego wagę wzorem $m \cdot f(\alpha)$, gdzie m jest długością ogniwa i α wielkością kąta dwuściennego (wielościanu W) przy krawędzi zawierającej to ogniwo. Podobnie określamy wagi ogniw w wielościanach $W_1, \ldots, W_n$.

Łatwo zauważyć, że suma wag (w wielościanie W) wszystkich ogniw leżących na krawędziach W jest równa niezmiennikowi Dehna $f(W)$. Istotnie, jeśli np. krawędź wielościanu W o długości l_1 składa się z ogniw o długościach m_1, m_2, m_3 (rys. 8), a kąt dwuścienny (wielościanu W) przy niej jest równy α_1, to $l_1 f(\alpha_1) = m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_2) + m_3 f(\alpha_3)$.

Podobnie dla innych krawędzi. Sumując otrzymujemy żądaną równość. Analogicznie niezmiennik Dehna wielościanu W_i jest równy sumie wag (w W_i) ogniw leżących na jego krawędziach. Tak więc dla obliczenia prawej strony (*) trzeba zsumować wagi wszystkich ogniw we wszystkich wielościanach $W_1, \ldots, W_n$. Obliczmy, z jakim współczynnikiem wchodzi do tej sumy długość m pewnego ogniwa ω.

Oznaczmy przez $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ kąty dwuścienne (przy ω) tych z wielościanów $W_1, \ldots W_n$, w których krawędzi zawarte jest ogniwo ω. Dla wygody załóżmy, że są to wielościany $W_1, \ldots, W_s$. Oczywiście suma wag ogniwa ω w wielościanach $W_1, \ldots, W_n$ jest równa

$$(**) \qquad m f(\gamma_1) + \ldots + m f(\gamma_s) = m(f(\gamma_1) + \ldots + f(\gamma_s)).$$

1° Może się zdarzyć, że ogniwo ω jest zawarte we wnętrzu wielościanu W (nie biorąc pod uwagę końców ω). Jeśli każdy z wielościanów $W_1, \ldots, W_n$ zawierający ogniwo ω zawiera je w pewnej krawędzi, to suma kątów γ_i tworzy kąt pełny (rys. 9) i $\gamma_1 + \ldots + \gamma_s - 2\pi = 0$.
Funkcja f jest addytywna, więc $f(\gamma_1) + \ldots + f(\gamma_s) = 2f(\pi) = 0$. Jeśli jeden z wielościanów $W_{s+1}, \ldots, W_n$ zawiera ω we wnętrzu pewnej ściany, to (rys. 10)

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_s = \pi \quad \text{i} \quad f(\gamma_1) + \ldots + f(\gamma_s) = f(\pi) = 0.$$

(Jeśli dwa wielościany zawierają ω we wnętrzach ścian, to ω nie może być ogniwem).

2° Ogniwo ω może leżeć na ścianie W (ale nie krawędzi). Wtedy (rys. 11)

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_s = \pi \quad \text{i} \quad f(\gamma_1) + \ldots + f(\gamma_s) = 0.$$

Zarówno w przypadku 1°, jak i 2° (**) jest równe zeru.

3° Jeśli nie zachodzi żaden z poprzednich przypadków, to ogniwo ω leży na krawędzi W. Teraz $\gamma_1 + \ldots + \gamma_s$ jest równe albo α, albo $\pi - \alpha$, gdzie α jest odpowiednim kątem dwuściennym W (rys. 12). W obu przypadkach $f(\gamma_1) + \ldots + f(\gamma_s) = f(\alpha)$ i (**) jest równe wadze ogniwa ω w wielościanie W. Tak więc suma po prawej stronie równa jest niezmiennikowi Dehna wielościanu W.

Musimy jeszcze wiedzieć, że funkcję addytywną na zbiorze skończonym można tak rozszerzyć do większego zbioru skończonego, by była nadal addytywna. Oczywiście wystarczy wiedzieć, jak rozszerzać na zbiór, który ma jeden element więcej. Przypuśćmy, że funkcja f jest addytywna na zbiorze M i $a \notin M$. Jeśli dla żadnej różnej od zera liczby całkowitej k oraz dla żadnych $a_1, \ldots, a_n \in M$ i $k_1, \ldots, k_n \in Z$ nie zachodzi

$$({}_*{}^*{}_*) \qquad ka = k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n,$$

to możemy jako $f(a)$ wziąć dowolną liczbę rzeczywistą. Jeśli natomiast $({}_*{}^*{}_*)$ zachodzi, to określamy

$$f(a) = \frac{1}{k}(k_1 f(a_1) + \ldots + k_n f(a_n)).$$

Liczba $f(a)$ jest dobrze określona. Jeśli $la = l_1 b_1 + \ldots + l_m b_m$ $(l, l_1, \ldots, l_m \in Z;\ b_1, \ldots, b_m \in M,\ l \neq 0)$, to $k(l_1 b_1 + \ldots + l_m b_m) = l(k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n)$,
więc $k(l_1 f(b_1) + \ldots + l_m f(b_m)) = l(k_1 f(a_1) + \ldots + k_n f(a_n))$,
gdyż funkcja f jest addytywna na M. Zatem

$$\frac{1}{k}(k_1 f(a_1) + \ldots + k_n f(a_n)) = \frac{1}{l}(l_1 f(b_1) + \ldots + l_m f(b_m)).$$

A oto dowód twierdzenia. Przypuśćmy, że W daje się rozłożyć na $W_1, \ldots, W_n$; V na $V_1, \ldots, V_n$ oraz wielościany W_j i V_j $(j = 1, \ldots, n)$ są przystające. Funkcję addytywną f na zbiorze M (patrz sformułowanie twierdzenia) rozszerzamy do funkcji addytywnej f^* określonej na zbiorze M^* zawierającym zbiór M i wielkości wszystkich kątów dwuściennych wielościanów $W_1, \ldots, W_n$ (a więc i $V_1, \ldots, V_n$). Z lematu

$$f(W) = f^*(W) = f^*(W_1) + \ldots + f^*(W_n),$$
$$f(V) = f^*(V) = f^*(V_1) + \ldots + f^*(V_n),$$

ale oczywiście $f^*(V_i) = f^*(W_i)$, tak więc

$$f(W) = f(V).$$

J. R.

(Na podstawie książki W. G. Bołtiańskiego „Trzeci problem Hilberta")

Rozwiązanie zadania M 382. Oznaczmy $x + y = s$.
Mamy $n = \dfrac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = \dfrac{s^2+s}{2} + x$, a warunki $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$, x, y całkowite możemy zapisać w formie x, s całkowite, $0 \leqslant x \leqslant s$. Wynika stąd, że dla ustalonego s: $x \in \{0, 1, \ldots, s\}$ i $n \in \left\{\dfrac{s^2+s}{2}, \dfrac{s^2+s}{2} + 1, \ldots, \dfrac{s^2+s}{2} + s\right\}$.

Zauważmy, że $\dfrac{s^2+s}{2} + s + 1 = \dfrac{(s+1)^2 + (s+1)}{2}$ oraz $\dfrac{0^2+0}{2} = 0$.
Tak więc każda liczba naturalna n należy do dokładnie jednego z przedziałów domkniętych $\left[\dfrac{s^2+s}{2}, \dfrac{s^2+s}{2} + s\right]$, wyznaczając w ten sposób $s(n)$, a jej miejsce w tym przedziale wyznacza $x(n)$. Wystarczy teraz położyć $y(n) = s(n) - x(n)$, by uzyskać parę (x, y) taką, że $n = \dfrac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$.

Rozwiązanie zadania M 381. Zauważmy, że łamana POQ dzieli wielokąt na dwa wielokąty o równych polach. (Aby się o tym przekonać, wystarczy połączyć O z wierzchołkami tych wielokątów i zauważyć, że w ten sposób podzieliliśmy je na trójkąty o wysokości równej promieniowi okręgu wpisanego). Ponieważ jednak, zgodnie z założeniem, prosta PQ połowi pole naszego wielokąta, trójkąt POQ musi mieć pole równe 0, a więc O leży na prostej PQ.

Trzeci problem Hilberta

W szkole wzoru na objętość czworościanu C $\left(\frac{1}{3}\cdot \text{pole podstawy}\cdot\text{wysokość}\right)$ uczono mnie tak: dzielono pewien graniastosłup o tej samej podstawie i wysokości co czworościan C na takie trzy czworościany C_1, C_2, C_3 (rys. 4), że C_1 i C_2, a także C_2 i C_3 miały takie same podstawy i wysokości, a ponadto C_1 był przystający do C. Tak więc objętość C była trzy razy mniejsza od objętości graniastosłupa.

Ale skąd wiadomo, że czworościany o takich samych podstawach i wysokościach mają równe objętości?

W płaskim przypadku łatwo podzielić trójkąt na dwa trójkąty i trapez tak, aby dał się z nich złożyć prostokąt (rys. 1) o tej samej podstawie i dwa razy krótszej wysokości. Tak więc dwa trójkąty o równych podstawach i równych wysokościach mają równe pola. Co więcej, można pokazać, że jeśli dwa prostokąty mają równe pola (iloczyny boków), to jeden z nich daje się podzielić na skończoną liczbę wielokątów, z których da się złożyć drugi (rys. 2 i 3).

Może to samo uda się z czworościanami? Nazwijmy równoważnymi przez podział (w skrócie *rpp*) dwa wielościany, z których pierwszy da się tak podzielić na skończoną liczbę wielościanów, by z otrzymanych kawałków można było złożyć drugi. Czy każde dwa czworościany o równych podstawach i równych wysokościach są *rpp*? Pytanie powyższe nazywane jest *trzecim problemem Hilberta*. Negatywną odpowiedź podał w roku 1900 M. Dehn. Autorem innego — prostszego — dowodu jest H. Hadwiger (1954 r.). Tak więc, aby uzupełnić dowód podany na początku artykułu, trzeba korzystać z przejścia granicznego (rys. 5), jak np. uzasadnia się regułę Cavalieriego.

Pokażemy, że „złą", tzn. nie *rpp*, parą czworościanów są czworościany H_1 i H_2 (rys. 6). Zauważmy, że relacja *rpp* jest relacją równoważności. Łatwo pokazać (rys. 7), iż H_1 jest *rpp* z graniastosłupem o podstawie trójkątnej. Przekształcając podstawę tego graniastosłupa w prostokąt (tak jak na rys. 1) stwierdzamy, że H_1 jest *rpp* z pewnym prostopadłościanem. Każde dwa prostopadłościany o równych objętościach są *rpp* (wystarczy dwukrotnie zastosować dla ich podstaw podział z rys. 2 i 3). Tak więc ostatecznie H_1 jest *rpp* z pewnym sześcianem.

Pokażemy, że H_2 nie jest *rpp* z żadnym sześcianem (nawet o równej mu objętości). Znajdziemy mianowicie pewien *niezmiennik* równoważności przez podział (czyli „coś", co jest takie samo dla wielościanów równoważnych przez podział), który jest różny dla H_2 i sześcianu.

Funkcję rzeczywistą f określoną na podzbiorze M liczb rzeczywistych nazywamy *addytywną*, jeśli dla każdych $a_1, \ldots, a_n \in M$ i $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych) spełniających warunek $k_1a_1 + \ldots + k_na_n = 0$ mamy $k_1f(a_1) + \ldots + k_nf(a_n) = 0$.

Niech W będzie wielościanem, M zbiorem liczb rzeczywistych zawierającym wartości $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ wszystkich kątów dwuściennych W (w radianach), $l_1, \ldots, l_p$ długościami odpowiednich krawędzi, a f funkcją addytywną na M. Liczbę

$$f(W) = l_1f(\alpha_1) + \ldots + l_pf(\alpha_p)$$

nazywamy niezmiennikiem Dehna wielościanu W.

Twierdzenie (Hadwiger). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ będą kątami dwuściennymi wielościanu W, a $\beta_1, \ldots, \beta_q$ kątami wielościanu V. Jeśli istnieje taka funkcja addytywna na zbiorze M zawierającym $\pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$, że $f(W) \neq f(V)$, to W i V nie są równoważne przez podział.

Jako wniosek z twierdzenia otrzymujemy, że H_2 i żaden sześcian nie są *rpp*. Kątami dwuściennymi H_1 są $\frac{\pi}{2}$ i α (rys. 6). Oczywiście, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Z równości tej wynika, iż $\frac{\alpha}{\pi}$ nie jest liczbą wymierną (dowód w numerze). Na zbiorze $M = \left\{\pi, \frac{\pi}{2}, \alpha\right\}$ określamy funkcję f

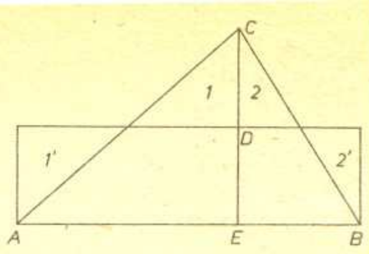
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 0, f(\alpha) = 1$. Funkcja f jest addytywna, gdyż jeśli elementy zbioru M spełniają warunek $k_1\frac{\pi}{2} + k_2\pi + k_3\alpha = 0$, to $k_3 = 0$ $\left(\text{inaczej } \frac{\alpha}{\pi} = -\frac{2k_1+k_2}{k_3}\right)$ i $k_1f\left(\frac{\pi}{2}\right) + k_2f(\pi) + k_3f(\alpha) = 0$.

Obliczmy $f(H_2)$ i $f(Q)$ (Q — sześcian o krawędzi l).

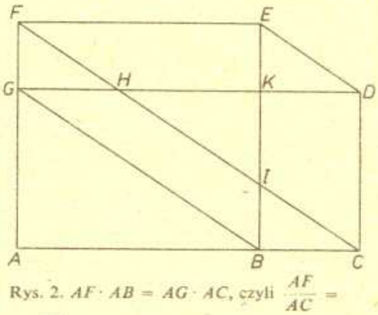
$$f(H_2) = 3f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\sqrt{2}f(\alpha) = 3\sqrt{2}.$$

$$f(Q) = 12lf\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Tak więc dla każdego sześcianu Q : $f(Q) \neq f(H_2)$ i, na podstawie twierdzenia, Q i H_2 (czyli również H_1 i H_2) nie są równoważne przez podział.



Rys. 1. Bok AB jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC (wtedy spodek wysokości spuszczonej z C leży wewnątrz odcinka AB). Trójkąty 1 i 1' oraz 2 i 2' są przystające.



Rys. 2. $AF\cdot AB = AG\cdot AC$, czyli $\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AB}$. Tak więc $BG \parallel CF$ i, podobnie, $DE \parallel BG$. Trójkąty GHF i BCI są zatem przystające ($GF = BI$) — podobnie trójkąty EFI i DHC. Jeśli odcinek FC przecina odcinek GK (tzn. jeśli $2\cdot AB > AC$), to podział jest zakończony ($ACDG = AGHIB \cup \cup DHC \cup BCI$: $ABEF = AGHIB \cup EFI \cup \cup GHF$). Jeśli $2\cdot AB \leqslant AC$, to zamiast prostokąta $ABEF$ rozpatrujemy równoważny przez podział prostokąt $A'B'E'F'$, dla którego $2\cdot A'B' > AC$ (rys. 3).

Oznaczmy: S — pole powierzchni podstawy czworościanu $ABCD$, h — jego wysokość. Obliczamy sumę objętości n (podobnych) graniastosłupów o wysokościach $\frac{h}{n}$, których suma teoriomnogościowa zawiera czworościan $ABCD$ (na rys. 5 $n = 5$). Graniastosłup k-ty od góry ma pole podstawy $\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot S$.

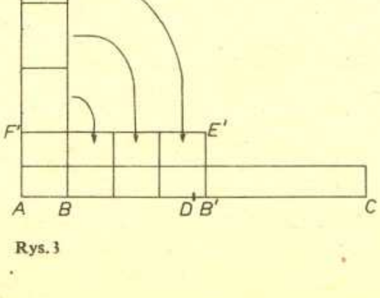
Tak więc szukana suma objętości jest równa

$$\frac{1}{n^3}\cdot h\cdot S\cdot(1^2+2^2+\ldots+n^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\cdot S\cdot h,$$

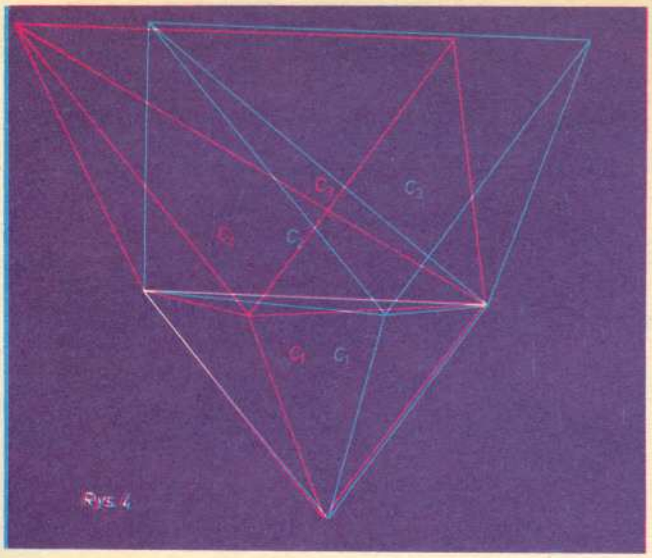
czyli objętość czworościanu nie jest większa niż

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\cdot S\cdot h = \frac{1}{3}S\cdot h.$$

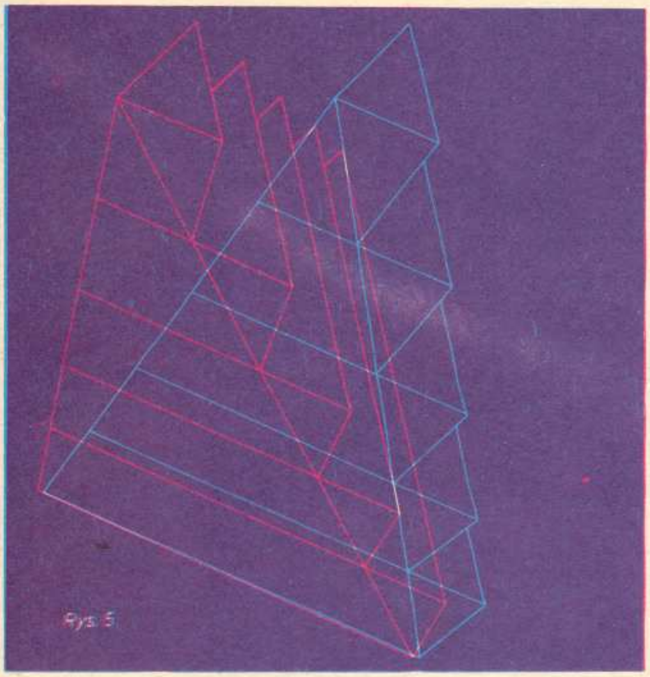
Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla graniastosłupów zawartych w czworościanie otrzymamy nierówność przeciwną. Tak więc objętość czworościanu $ABCD$ musi być równa $\frac{1}{3}S\cdot h$.



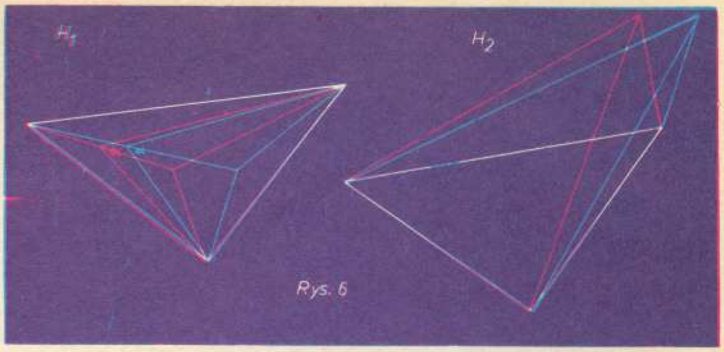
Rys. 3



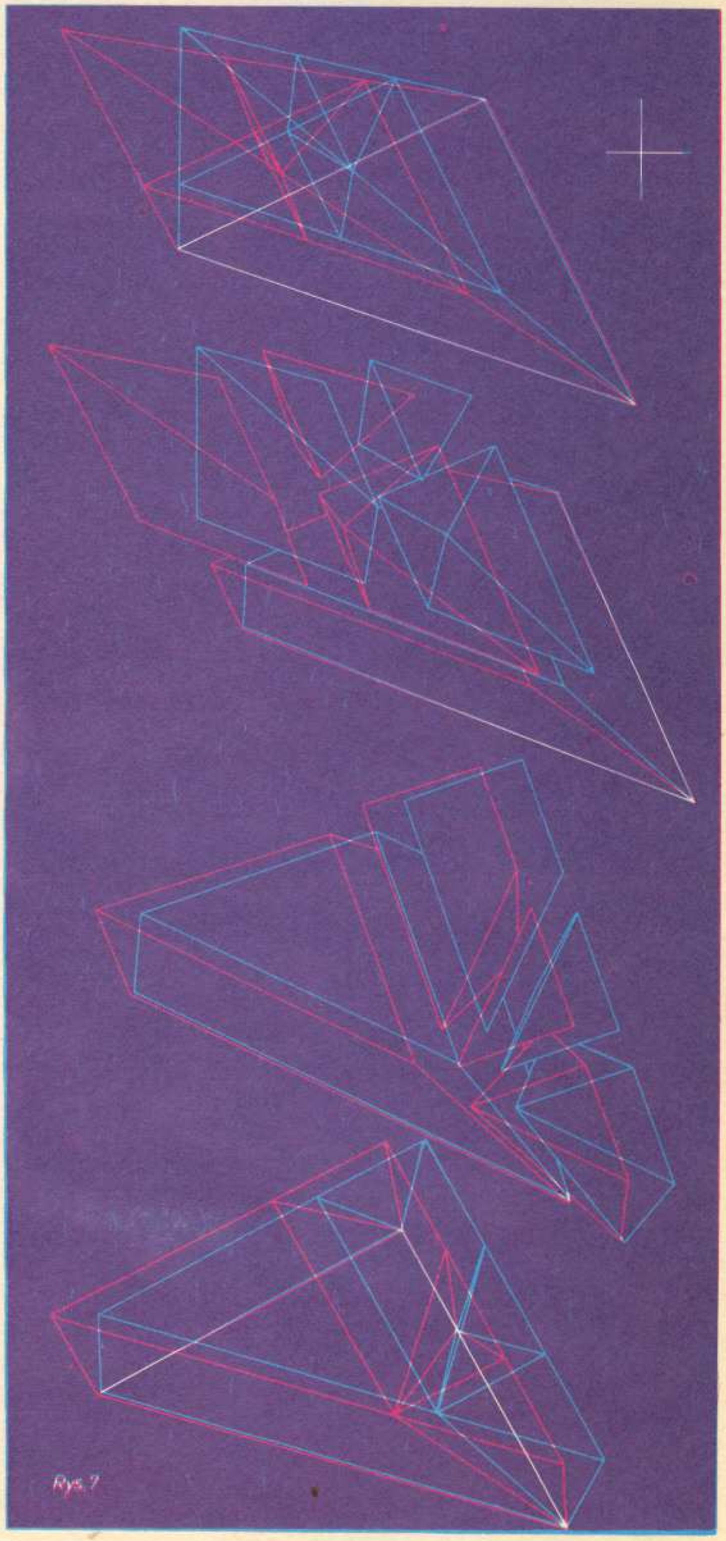
Rys. 4



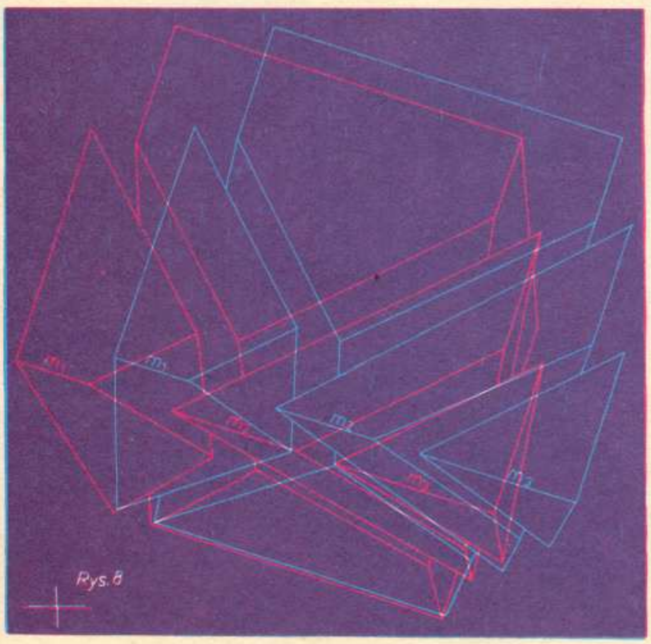
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8