Lista uczestników ligi zadaniowej

"Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 5/1984

Andrzej Pawłowski	- Zabrze	47,09	D
Adam Wyrwa	- N. Wiśnicz	45,76	K
Sławomir Solecki	- Ostrów Wkp.	44,03	K
Piotr Figurny	- Lubartów	43,78	
Marian Roman	- Ełk	38,72	K
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	37,74	
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	37,24	K
Grzegorz Kuś	- Kraków	36,57	
Zbigniew Bartold	- Gdynia	36,22	K
Kazimierz Serbin	- Sanok	36,15	
Anna Gluza	- Toruń	35,28	
Ryszard Mazurek	- Wrocław	34,49	
Wojciech Krzyżański	- Żywiec	34,45	
Zbigniew Koza	- Jelenia Góra	34,30	
Krystyna Witek	- Ostrów Maz.	33,40	
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	33,35	
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	32,10	W
Jan Ciach	- Ostrowiec Św	30,56	
Jerzy Tyszkiewicz	- Warszawa	30,34	
Krzysztof Jakubczak	- Kudowa Zd.	29,11	
Jerzy Mikuta	- Zielona Góra	28,94	
Władysław Wasiak	- Toruń	28,92	
Tomasz Rawlik	- Gliwice	28,62	K
Jacek Uryga	- Bytom	27,93	W
Maciej Głuszek	- Wrocław	27,85	
Janusz Prajs	- Opole	27,57	
Jacek Mańdziuk	- Lublin	25,37	
Zygmunt Bartkowski	- Warszawa	25,16	
Krzysztof Zygan	- Lubin	24,98	
Adam Stadler	- Rzeszów	24,94	
Tomasz Masłowski	- Toruń	24,40	
Marek Prauza	- Poraj	23,20	K
Krzysztof Trautman	- Warszawa	22,75	K
Tomasz Szymczyk	- Bielsko-B.	21,54	
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	21,53	K
Zbigniew Kryłow	- Sopot	21,49	
Małgorzata Czerniakowska	- Gdańsk	20,54	K
Zbigniew Zaus	- Kraków	20,53	
Marcin Mazur	- Białystok	20,46	
Mariusz Łopusiewicz	- Legnica	19,63	
Dezső Gross	- Budapeszt	17,12	
Stanisław Dorosz	- Kraków	16,52	
Jacek Jakubiak	- Łódź	16,30	
Henryk Mikołajczak	- Wałbrzych	15,69	
Andrzej Lenarcik	- Kielce	15,38	
Dariusz Łydźba	- Bierutów	14,38	
Mirosław Mikucki	- Augustów	14,21	
Jarosław Kulpa	- Praha	14,20	
Mirosław Matlęga	- Skoczów	14,00	
Karol Jachacy	- Tłuszcz	13,86	
Tomasz Komorowski	- Świdnik	13,79	K
Krystian Bartniczek	- Bytom	13,65	
Marek Gałecki	- Milanówek	13,38	W
Jerzy Grzywocz	- Ruda Śl.	13,29	
Stanisław Wrzos	- Lubin	13,22	
Tomasz Biegański	- Lublin	13,13	K
Michał Marczak	- Radom	13,01	
Paweł Bujak	- Warszawa	12,85	
Krzysztof Zapisek	- Warszawa	12,85	
Jarosław Kaczyński	- Starogard Gd	12,82	
Radosław Zapert	- Kielce	12,53	
Paweł Kamiński	- Warszawa	12,44	W
Stanisław Zygmanowski	- Ostrobudki	11,89	
Lech Bartłomiejczyk	- Gliwice	11,64	
Cezary Suski	- Włocławek	11,47	
Zbigniew Maj	- Zabrze	11,41	
Andrzej Burliga	- Świebodzice	11,23	
Włodzimierz Zwonek	- Kraków	10,88	
Jacek Simsak	- Kraków	10,63	
Waldemar Oleśniewicz	- Drezdenko	10,56	
- O -			
Wojciech Olszewski	- Brwinów	9,19	K
Jerzy Małopolski	- Kraków	8,85	K
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	8,09	K
Jerzy Milczarek	- Gorzów Wkp.	7,76	K
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	7,00	D
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	5,61	K
Edward Orzechowski	- Warszawa	5,17	D
Józef Siwy	- Łaziska G.	1,96	K
Włodzimierz Szymczyk	- Zielonka	1,60	K

Zestawienie obejmuje nazwiska wszystkich uczestników, którzy w klasyfikacji ligowej zebrali co najmniej 10 punktów, a także członków Klubu 44 mających aktualnie na koncie mniej niż 10 punktów, ale wykonujących już drugą lub trzecią rundę. Literki K, D, W przy stanie konta oznaczają członków Klubu 44 jednokrotnych, dwukrotnych i trzykrotnych /Weteranów/.

Współczynniki trudności zadań 85, 86, 87:

1,83 3,01 2,86

Spełniamy życzenie wielu naszych Czytelników i poczynając od niniejszego numeru rozszerzamy zmagania ligowe Klubu 44 również na fizykę. Odtąd więc będziemy mieli dwie „konkurencje" — matematyczną i fizyczną. Punktacja ligowa w każdej z nich będzie obliczana oddzielnie.

Szczupłość miejsca nie pozwala na zamieszczanie w każdym numerze trzech zadań w każdej z dwóch konkurencji — jak to było do tej pory w lidze matematycznej. Będą więc co miesiąc dwa zadania z matematyki i dwa z fizyki. Innych istotnych zmian w regulaminie nie ma. Udział w lidze jest otwarty dla każdego, choć nadal najbardziej liczymy na młodzież szkolną i studencką. Przewidujemy dużą różnorodność zadań i zróżnicowanie stopnia ich trudności. Do ich rozwiązania będzie jednak zasadniczo wystarczał zasób wiadomości szkolnych z matematyki i fizyki.

Każda z tych dwóch konkurencji będzie żyła własnym życiem. Rozwiązania zadań fizycznych i matematycznych będą czytane i oceniane, rzecz jasna, przez inne osoby. Dlatego bardzo jest dla nas ważne, by rozwiązania te nadchodziły w oddzielnych kopertach (por. punkt 7 regulaminu). Za to przewidziany w punkcie 13 zaszczytny (choć, jak pisze jeden z naszych Czytelników: beznadziejny) tytuł Weterana, będzie można zdobyć w „dwuboju" uzyskując sumę 44 punktów np. dwa razy w jednej konkurencji i raz w drugiej.

Nadal aktualny jest apel o przysyłanie propozycji zadań. Gdy autor wykorzystanego przez nas zadania jest jednocześnie uczestnikiem konkursu ligowego, a zadanie dostarczył wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym), otrzymuje w punktacji ocenę maksymalną.

Liga matematyczna kończy przeszło trzyletni okres samotnej egzystencji. Chwila jest więc sposobna do pewnych podsumowań. Podamy trochę informacji, uwzględniając w naszych danych historię ligi od jej utworzenia do przerwy wakacyjnej 1984.

W konkursie brało udział 270 uczestników, w tym 17 pań i dziewcząt. Najwięcej uczestników, bo 37, dostarczyła Warszawa, dalej Kraków i Wrocław — zresztą proponujemy rzut oka na mapę. Nie zmieścili się na niej trzej uczestnicy spoza kraju: Polacy z Pragi i z Perugii oraz Węgier z Budapesztu. Blisko połowa ogólnej liczby uczestników to „meteory" — osoby, które przysłały rozwiązania zadań raz jeden, no, może dwa razy, i umilkły. (Namawiamy serdecznie do kontynuowania zabawy.) Na miano wytrwałych zasługuje może setka osób. Najwytrwalszym jest bez wątpienia pan Jerzy Janowicz, który nie opuścił ani jednej kolejki ligowej, od samego startu ligi.

Kim są uczestnicy? Nasze dane są niekompletne, bowiem bardzo wielu uczestników nie pisze nic o sobie. Wśród tych, którzy się przedstawili dokładniej niż tylko imieniem i nazwiskiem, grupę najliczniejszą stanowią studenci, dalej nauczyciele matematyki i uczniowie, wreszcie przedstawiciele innych zawodów. Rozkład ten znalazł także odzwierciedlenie w maleńkiej dziewięcioosobowej próbce złożonej z członków Klubu 44, którzy przybyli na spotkanie Klubu w dniach 17 i 18 lutego 1984 (na 12 zaproszonych). W tej dziewiątce znaleźli się: uczeń liceum, student uniwersytetu, trzech studentów uczelni technicznych, nauczyciel szkoły podstawowej, dwóch nauczycieli szkół średnich oraz pianista.

To teraz garść refleksji z samego zjazdu. Z przybyłymi gośćmi spotkał się Dziekan Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, doc. dr hab. Henryk Woźniakowski. Profesor tegoż wydziału, dr hab. Andrzej Białynicki-Birula, poprowadził pogadankę pod hasłem *Czym się różni twórcza praca zawodowego matematyka od rozwiązywania zadań*? Matematycy, informatycy, fizycy i astronomowie UW zaprezentowali wyposażenie swoich pracowni (kreda i tablica, komputery, lasery, refraktory...). W gronie zespołu redakcyjnego *Delty* porozmawialiśmy sobie o *Delcie*. Resztę czasu wypełniły dyskusje o zadaniach i ich rozwiązaniach, kryteriach ocen, współczynnikach trudności itp., itd. Ta „reszta czasu" okazała się dalece niewystarczająca. Goście żegnali się z nami z poczuciem niedosytu; tak nam się wydaje...

W bieżącym roku szkolnym planujemy kolejne spotkanie Klubu 44, w liczniejszym już gronie. Gdy piszemy te słowa, Klub liczy 24 członków, w tym czterech „trzykrotnych" (czyli Weteranów) i dwóch „dwukrotnych". Wybiegając myślą naprzód już się cieszymy na dalsze jeszcze spotkania, w których zapewne wezmą udział adepci, a później weterani bojów ligowych również w fizyce.

Od ostatniego omówienia zadań ligowych (*Delta* 1/1984) mija rok. Pora na kolejne omówienie. Znajdą się w nim te zadania, które przez nielicznych tylko uczestników zostały rozwiązane poprawnie (lub z niewielkimi lukami) oraz te, dla których uczestnicy konkursu podali rozwiązania istotnie różne od naszych rozwiązań — bardziej eleganckie lub ogólniejsze. Brak komentarza przy informacji o rozwiązaniu oznacza, że jest ono zasadniczo zgodne z naszym.

Zadanie 56 [Zbiór wierzchołków wielokąta ma środek (oś) symetrii ⇒ wielokąt też ma; dodać założenie tak, by twierdzenie stało się prawdziwe] (WT = 2,46). Dziewięciu uczestników udowodniło twierdzenie pod założeniem wypukłości. Dwóch uczestników (M. Prauza, J. Szweda) proponuje założenie istnienia środka (osi) symetrii również dla zbioru środków boków wielokąta, ale nie dowodzi twierdzenia przy tym założeniu; nie wiemy, czy takie twierdzenie jest prawdziwe.

Rozmieszczenie uczestników ligi zadaniowej. Kolorowe punkty to członkowie Klubu 44.

Zadanie 60 [Na ile co najwyżej sposobów można przedstawić liczbę naturalną jako sumę czterech różnych dzielników?] (WT = 2,14). Dużo poprawnych rozwiązań. D. Sowizdrzał pisze (bez szczegółów), że numerycznie rozwiązał analogiczne zadanie dla pięciu i sześciu dzielników; wyniki: 71 i 2237.

Zadanie 62 Znak wyrażenia $w = 2R+r-p$ w trójkącie ostro-, prosto- i rozwartokątnym] (WT = 2,86). Czternaście dobrych rozwiązań. Elegancki wzór na w (w postaciach nieznacznie różniących się między sobą) uzyskali J. Uryga, K. Jedziniak, T. Komorowski: $w = 2Ru_1u_2u_3$, gdzie $u_i = \sin(x_i/2) - \cos(x_i/2)$, x_i — kąty trójkąta.

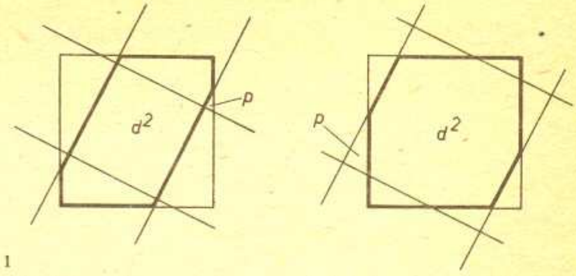
Zadanie 63 [Łamigłówka literowa — zaszyfrowane dodawanie z warunkami dodatkowymi] (WT = 1,84). J. Depta przysłał program komputerowy generujący wszystkie rozwiązania (bez warunków dodatkowych) wraz z wydrukiem wyników (40 rozwiązań).

Zadanie 64 [Przedstawić 10^6 jako sumę Σx_i, $x_i > 0$, tak, by $\Pi x_i = \max$] (WT = 3,15). Cała trudność polegała na rozstrzygnięciu, czy należy wziąć $m = 367879$, czy $m+1$ równych składników. Sprowadzało się to do ustalenia, co większe: $f(m)$ czy $f(m+1)$, gdzie $f(x) = (10^6x^{-1})^x$. Bezbłędnie lub z drobnymi usterkami rozwiązali to zadanie P. Figurny, J. Ciach, M. Gałecki, G. Kuś, M. Czerniakowska, P. Kamiński. Nasze rozwiązanie wydrukowane w numerze 2/1984 zawiera istotny błąd! (w zwrocie jednej nierówności). Bezsprzecznie najbardziej eleganckie w tym fragmencie jest rozwiązanie pani Czerniakowskiej ciąg $a_n = (1+1/n)^{n+1/2}$ jest malejący (dowód np. przez różniczkowanie funkcji $(1+x)^{1/x+1/2}$) i zbieżny do e, więc $a_n >$ e dla wszystkich n; stąd $f(m)/f(m+1) = 10^{-6}m^{-m}(m+1)^{m+1} = 10^{-6}a_m(m(m+1))^{1/2} > 10^{-6}\mathrm{e}\sqrt{367879 \cdot 367880} > 1$.

Zadanie 65 [Czy można podzielić sześcian na skończoną liczbę sześcianów różnej wielkości?] (WT = 3,65). Że nie można, pokazali P. Figurny, M. Gałecki, G. Kuś, R. Pagacz, J. Uryga, J. Janowicz oraz (z zastrzeżeniami) J. Milczarek.

Zadanie 71 [Czworokąt $ABCD$ wpisany w koło $\Rightarrow$ środki kół wpisanych w trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB są wierzchołkami prostokąta] (WT = 3,15). Dziewiętnaście dobrych rozwiązań, w większości identycznych z naszym. Zgrabniejsze rozwiązanie, które przedstawili L. Bartłomiejczyk, W. Cerczyński, J. Janowicz, Z. Koza, R. Pagacz (oraz podobnie T. Komorowski i M. Gałecki) opiera się na spostrzeżeniu, że odcinki $\overline{O_iO_{i+1}}$ (gdzie O_i — środki rozważanych kół) są parami równoległe do odcinków łączących środki łuków AB i CD oraz BC i DA, a te ostatnie dwa odcinki są prostopadłe.

Zadanie 74 [13-elementowe podzbiory zbioru 52-elementowego można ustawić w cykl, w którym każde dwa sąsiednie różnią się dokładnie jednym elementem] (WT = 3,69). Twierdzenia dowodzi się biorąc zamiast liczb 13 i 52 dowolne liczby k i n, $k \leqslant n$, i stosując indukcję: albo względem n przy dowolnym k (jak w naszym rozwiązaniu), albo odwrotnie. Dobre rozwiązania: P. Kamiński, J. Kulpa, J. Prajs, J. Uryga, P. Figurny, M. Gałecki, Z. Koza, G. Kuś, W. Krzyżański.

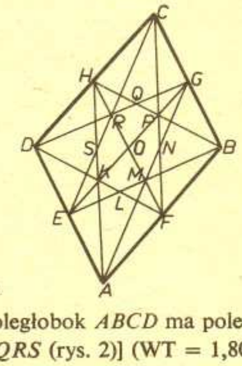


Rys. 1

Zadanie 76 [Z kwadratu o boku a wyciąć dwiema prostymi równoległymi w odstępie $d \leqslant a$ figurę o maksymalnym polu] (WT = 3,62). Większość rozwiązań, jak i nasze, opiera się na dość uciążliwych rachunkach; tak to robią P. Figurny, M. Gałecki, T. Józefczyk, J. Kulpa, M. Łopusiewicz, T. Rawlik, J. Uryga oraz (z usterkami) T. Komorowski, M. Marczak, K. Jedziniak, D. Sowizdrzał. Na tym tle uznanie zyskuje piękne rozwiązanie Wojciecha Krzyżańskiego: Wystarczy ograniczyć uwagę do par prostych przecinających wszystkie boki kwadratu i położonych symetrycznie względem jego środka. Weźmy taką parę prostych i poprowadźmy prostopadle do nich drugą parę prostych, też w odstępie d i symetrycznie względem środka kwadratu. Powstanie kwadrat o polu d^2 i cztery trójkąciki o równym polu p, leżące albo wewnątrz, albo na zewnątrz danego kwadratu o polu a^2 (rys. 1). Pole rozważanej figury (o pogrubionym brzegu) równa się $(a^2+d^2-4p)/2$ (w obu przypadkach!). Trzeba więc zminimalizować p; gdy $d \geqslant a/\sqrt{2}$, należy ustawić proste pod takim kątem, by $p = 0$ (trójkąciki redukują się wtedy do punktów, mały kwadrat jest wpisany w duży); gdy $d < a/\sqrt{2}$, minimalne p uzyskuje się ustawiając proste równolegle do przekątnych dużego kwadratu. To samo rozwiązanie, ale tylko dla $d \geqslant a/\sqrt{2}$, podał też P. Kamiński.

Zadanie 77 [Na ile co najwyżej części 20 okręgów może podzielić sferę?] (WT = 3,06). Dość dużo rozwiązań dobrych (lub prawie). M. Jagiełka podaje (bez dowodu) wzór na maksymalną liczbę „elementów" k-wymiarowych powstałych w wyniku podziału sfery p-wymiarowej przez n sfer $(p-1)$-wymiarowych.

Zadanie 80 [Czy istnieje parkietaż płaszczyzny z przystających n-kątów wypukłych, $n = 5,7,8$?] (WT = 3,54). Istnieje tylko dla $n \leqslant 6$. Pokazali to bezbłędnie (lub odesłali do literatury) J. Janowicz, P. Kamiński, T. Komorowski, J. Uryga, a z usterkami W. Krzyżański, S. Solecki, M. Gałecki.



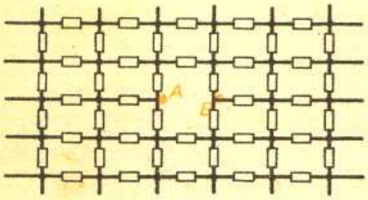
Rys. 2

Zadanie 83 [Równoległobok $ABCD$ ma pole S, obliczyć pole ośmiokąta $KLMNPQRS$ (rys. 2)] (WT = 1,80). Dużo dobrych rozwiązań, najczęściej przez pracowite rozpatrywanie licznych proporcji (jak i w naszym rozwiązaniu). Znacznie zgrabniej robią to P. Kamiński i A. Wyrwa (a dość podobnie J. Mikuta i G. Pacyna): $\overline{EM}$ i $\overline{FK}$ to środkowe w trójkącie OEF, więc pole czworokąta $OKLM$ równa się 1/3 pola OEF, czyli 1/24 pola $ABCD$; podobnie z czworokątami $OMNP$, $OPQR$, $ORSK$.

Za rok — kolejne omówienie i obszerna czołówka ligi.

Zadania z fizyki nr 1, 2

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



1. Znaleźć opór między punktami A i B nieskończonej płaskiej sieci o kwadratowych oczkach — jak na rysunku, złożonej z jednakowych oporników $r = 100\ \Omega$, która została przerwana między tymi punktami.

2. Wyjaśnić mechanizm powstawania dźwięku podczas wirowania trzymanej za jeden koniec plastykowej, karbowanej rury (popularna zabawka — „grająca rura"). Jak to się dzieje, że w zależności od prędkości wirowania uzyskiwane są tony o różnej wysokości?

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą Klub 44.

2. Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po 4 zadania w każdym numerze: 2 z matematyki i 2 z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przesyłaniu opracowanych rozwiązań Redakcji *Delty*. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przesłać rozwiązanie choćby jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12, np. termin nadsyłania rozwiązań zadań z nr 11/1985 upływa 31 stycznia 1986). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie:
Klub 44 M lub Klub 44 F.

8. Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednobrzmiących nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 ustalaną według następującej zasady: jeżeli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4-3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) są sumowane, oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dziedzin uczestnik staje się członkiem Klubu 44.

12. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem Klubu 44) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

13. Trzykrotne uzyskanie członkostwa Klubu 44 daje tytuł Weterana Klubu 44.

14. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*.

15. Członkowie Klubu 44 będą zapraszani na spotkania Klubu 44, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.

16. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian Regulaminu.

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 III 1985

Zadania z matematyki nr 103, 104

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

103. Wielokąt foremny W o nieparzystej liczbie boków jest wpisany w okrąg, a punkt P jest dowolnym punktem tego okręgu. Dowieść, że można podzielić zbiór wierzchołków wielokąta W na dwa rozłączne podzbiory A i B tak, by suma odległości punktu P od punktów zbioru A była równa sumie odległości punktu P od punktów zbioru B.

104. Wyznaczyć część całkowitą liczby

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

Zadanie 104 przysłał pan Marcin Mazur z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z numeru 9/1984

Przypominamy treść zadań:

91. Łącząc odcinkami środki kolejnych boków danej łamanej zamkniętej otrzymujemy nową łamaną zamkniętą. Powtarzając tę operację dostajemy ciąg łamanych zamkniętych. Dowieść, że ciąg ich długości dąży do zera.

92. Czy trzema kwadratami o boku 5 można pokryć kwadrat o boku 2π?

93. Każdą liczbę $x = m/n \in (0,1)$, $m, n \in N$, można przedstawić jako sumę odwrotności co najwyżej $n-1$ różnych liczb naturalnych.

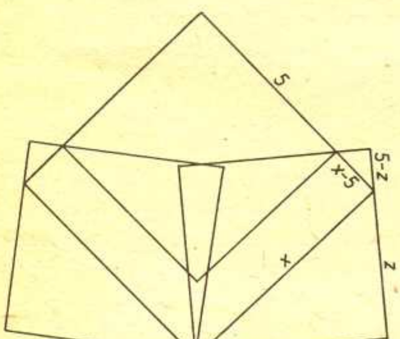
91. Oznaczmy daną łamaną przez $Ł_0$, zaś łamaną otrzymaną w n-tym kroku przez $Ł_n$. Wybierzmy dowolnie pewien punkt płaszczyzny O i oznaczmy przez c_n sumę kwadratów odległości wierzchołków $Ł_n$ od O, a przez d_n sumę kwadratów długości boków $Ł_n$. Ustalmy n. Niech $P_1, \ldots, P_m$ będą kolejnymi wierzchołkami $Ł_n$ i niech Q_i będzie środkiem odcinka $\overline{P_iP_{i+1}}$ $i = 1, \ldots, m$; $P_{m+1} = P_1$. Punkty $Q_1, \ldots, Q_m$ są kolejnymi wierzchołkami $Ł_{n+1}$. Zachodzą następujące równości (kropki oznaczają iloczyn skalarny wektorów):

$$P_iP_{i+1}^2 = P_iP_{i+1}\cdot P_iP_{i+1} = (OP_{i+1}-OP_i)\cdot(OP_{i+1}-OP_i) = OP_{i+1}^2+OP_i^2-2OP_i\cdot OP_{i+1},$$

$$OQ_i^2 = OQ_i\cdot OQ_i = \frac{1}{2}(OP_i+OP_{i+1})\cdot\frac{1}{2}(OP_i+OP_{i+1}) = \frac{1}{4}(OP_i^2+OP_{i+1}^2+2OP_i\cdot OP_{i+1}),$$

skąd $P_iP_{i+1}^2+4\,OQ_i^2 = 2\,OP_i^2+2\,OP_{i+1}^2$.

Sumując po $i = 1, \ldots, m$ dostajemy $d_n+4c_{n+1} = 2c_n+2c_n$. Zatem $c_{n+1} = c_n-d_n/4$, ciąg (c_n) jest malejący, więc zbieżny. Stąd $\lim d_n = \lim(4c_{n+1}-4c_n) = 0$, co jest równoważne tezie zadania.



92. Można. Rysunek przedstawia metodę pokrycia większego kwadratu trzema mniejszymi. Niech bok większego kwadratu ma długość x, a mniejszego 5, jak w zadaniu. Z podobieństwa uwidocznionych na rysunku trójkątów prostokątnych oraz z twierdzenia Pitagorasa, zastosowanego do jednego z nich, wynika układ równań $(5-z)/5 = (x-5)/x$, $5^2+z^2 = x^2$, mający w liczbach dodatnich x rozwiązanie $x = 5\sqrt{(1+\sqrt{5})/2} = 6{,}36\ldots > 2\pi$.

93. Określamy indukcyjnie dwa ciągi, (k_i) oraz (x_i), przyjmując $k_1 = 0$, $x_1 = 0$, $k_i = [i!\,(x-x_{i-1})]$, $x_i = x_{i-1}+k_i/i!$ dla $i \geqslant 2$; nawiasy kwadratowe oznaczają branie części całkowitej. Tak więc $k_i \leqslant i!\,(x-x_{i-1}) < k_i+1$, skąd po prostym przekształceniu i uwzględnieniu określenia x dostajemy

$$(1) \qquad 0 \leqslant i!\,(x-x_i) < 1.$$

Mnożąc (1) przez $i+1$ otrzymujemy nierówność podwójną, której środkowy człon ma część całkowitą równą k_{i+1}. Stąd $0 \leqslant k_{i+1} < i+1$ dla $i \geqslant 2$, czyli $0 \leqslant k_i < i$ dla $i \geqslant 2$ (dla $i = 2$ banalne sprawdzenie). Z indukcyjnej definicji ciągu (x_i) wynika, że

$$(2) \qquad x_n = \frac{k_2}{2!}+\frac{k_3}{3!}+\ldots+\frac{k_n}{n!}.$$

Zatem dla $i = n$ środkowy człon nierówności (1) jest liczbą całkowitą, a wobec tego $x = x_n$ i wzór (2) przedstawia liczbę x jako sumę $n-1$ składników, z których pewne mogą być zerami. Z oszacowania $k_i < i$ wynika, że niezerowe składniki są odwrotnościami liczb naturalnych, i to różnych, bowiem jeśli $i < j$, $k_i > 0$, $k_j > 0$, to

$$\frac{k_j}{j!} < \frac{j}{j!} = \frac{1}{(j-1)!} \leqslant \frac{1}{i!} \leqslant \frac{k_i}{i!}.$$

Uwaga. Począwszy od $i = n$ ciąg (x_i) jest już oczywiście stały. Gdy natomiast $x \in (0, 1)$ jest liczbą niewymierną, opisana procedura daje przedstawienie x w postaci sumy szeregu nieskończonego $\Sigma\, k_i/i!$, o sumach częściowych postaci (2). Nierówność (1) daje oszacowanie szybkości zbieżności tego szeregu, a także pozwala udowodnić jednoznaczność doboru liczników k_i.