Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 12/1984

Piotr Figurny	- Lubartów	51,50pkt
Jerzy Mikuta	- Zielona G.	48,18pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	45,23pkt
Tomasz Komorowski	- Świdnik	41,93pkt
Krystyna Witek	- Ostrów Maz	41,86pkt
Marian Roman	- Ełk	41,28pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	40,46pkt
Anna Gluza	- Toruń	40,38pkt

Współczynniki trudności zadań 100, 101, 102:
2,92 3,24 1,56

Panowie P. Figurny i J. Mikuta - po raz pierwszy, a pan M. Gałecki - już po raz czwarty zaliczają sumę 44.
Na półmetku czwartego sezonu swego istnienia Klub 44 liczy 32 (czyli okrągło 2^5) członków.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

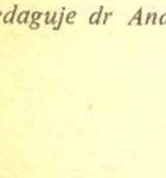
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Rozwiązania zadań z numeru 2/1985

Przypominamy treść zadań:

3. Cienki, sztywny, jednorodny pręt stojący pionowo na idealnie gładkim, poziomym podłożu zostaje minimalnie wychylony z położenia równowagi i puszczony. Obliczyć przyspieszenie kątowe jako funkcję kąta (rys. 1) podczas jego upadku. Czy pręt może ulec złamaniu? Jaki będzie jego ruch po idealnie sprężystym zderzeniu z podłożem?
4. Do wykrywania i lokalizacji okrętów podwodnych używany jest sonar wykorzystujący odbicie fali akustycznej od powierzchni okrętu. Dlaczego w wodach tropikalnych niezależnie od mocy i czułości urządzeń zasięg sonaru ograniczony jest do 1 km?

3. Wprowadzamy oznaczenia: m — masa pręta, l — długość pręta, $I = \frac{1}{12}ml^2$ — moment bezwładności pręta względem jego środka (środka masy), g — przyspieszenie ziemskie.



Rys. 1

Rys. 2

Wobec gładkości podłoża pomijamy tarcie pręta o nie. Siła F działająca na pręt ze strony podłoża (rys. 1) jest zatem skierowana pionowo, podobnie jak i siła ciężkości mg. Wnioskujemy stąd, że środek masy pręta spada pionowo w dół z przyspieszeniem

$$a = \frac{mg - F}{m}. \tag{1}$$

Moment siły F względem środka pręta, mający wartość

$$M = F\frac{l}{2}\sin\alpha, \tag{2}$$

będzie nadawał prętowi przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{6F\sin\alpha}{ml}; \tag{3}$$

moment ten wywiera na pręt działanie zginające i może doprowadzić do jego złamania (rys. 2). Ponieważ dolny koniec pręta cały czas styka się z podłożem, ślizgając się po nim, między a i ε zachodzi związek

$$a = \frac{l}{2}\varepsilon\sin\alpha. \tag{4}$$

Z równań (1), (3), (4) wyznaczamy $F = \dfrac{mg}{1+3\sin^2\alpha}$, otrzymując następnie $\varepsilon = \dfrac{6\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha}\dfrac{g}{l}$.

W procesie zderzenia następuje dla każdego elementu pręta zmiana zwrotu prędkości z zachowaniem jej wartości oraz pionowego kierunku. W rezultacie zarówno pęd pręta, jak i jego moment pędu ulegają zmianie na przeciwnie skierowane, zachowując wartości, jakie miały przed zderzeniem. Ruch pręta po zderzeniu będzie więc symetryczny względem ruchu przed zderzeniem. Ścisły dowód tego jest dość złożony i nie był wymagany od uczestników ligi.

4. Woda morska jest dla fal akustycznych ośrodkiem niejednorodnym: prędkość rozchodzenia się dźwięku zależy m.in od temperatury. W wodach tropikalnych, gdzie występuje duży gradient pionowy temperatury, prędkość dźwięku maleje ze wzrostem głębokości, co powoduje ugięcie fali akustycznej w dół (efekt analogiczny do załamania światła w ośrodku o monotonicznie zmieniającym się współczynniku załamania). W związku z tym fala emitowana z nadajnika do pewnych miejsc w ogóle nie dociera — są to tzw. obszary cienia akustycznego, niedostępne dla sonaru (rysunek).

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 2/1985

Przypominamy treść zadań:

105. Liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek $\sum x_k^2 \leqslant 1/n$. Dowieść, że $\left(\sum kx_k^2\right)^3 \leqslant (n+1)^2/4$.

106. Prostopadłościan o wymiarach całkowitych a, b, c podzielono na sześciany jednostkowe. Ile spośród tych sześcianów ma wspólne punkty wewnętrzne z jedną (ustaloną) przekątną prostopadłościanu?

105. Weźmy dowolne liczby dodatnie a, b. Ponieważ

$$a^2x_k^2 \cdot bk = (a^3x_k^3 \cdot a^3x_k^3 \cdot b^3k^3)^{1/3} \leqslant \frac{1}{3}(2a^3x_k^3 + b^3k^3), \text{ więc}$$

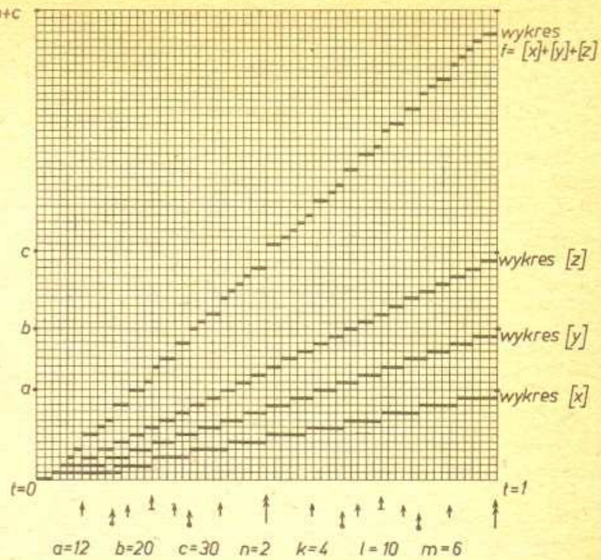
sumując po k otrzymujemy $a^2b\sum kx_k^3 \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2a^3}{n} + \dfrac{n^2(n+1)^2b^3}{4}\right)$.

Gdy w szczególności przyjmiemy $a = n^{1/3}$, $b = (4n^{-2}(n+1)^{-2})^{1/3}$, to ostatnia nierówność przybierze postać

$$n^{2/3}(4n^{-2}(n+1)^{-2})^{1/3}\sum kx_k^2 \leqslant 1,$$

co po podniesieniu stronami do trzeciej potęgi daje tezę zadania.

106. Odpowiedź: $a+b+c-\mathrm{NWD}(a,b)-\mathrm{NWD}(b,c)-$ $-\mathrm{NWD}(c,a)+\mathrm{NWD}(a,b,c)$. Dowód. Przyjmijmy układ współrzędnych tak, by trzy krawędzie prostopadłościanu leżały na osiach układu oraz by końcami wyróżnionej przekątnej $\overline{AZ}$ były punkty $A = (0,0,0)$, $Z = (a,b,c)$. Wyobraźmy sobie punkt poruszający się ruchem jednostajnym wzdłuż przekątnej $\overline{AZ}$ i przyjmijmy, że w chwili $t = 0$ punkt ten jest w położeniu A, a w chwili $t = 1$ w położeniu Z. Określamy funkcję $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R}$ następująco: jeśli w chwili t wędrujący punkt ma współrzędne (x, y, z), to $f(t) = [x]+[y]+[z]$. Jest to funkcja niemalejąca, o wartościach całkowitych, $f(0) = 0$, $f(1) = a+b+c$. Liczba sześcianów jednostkowych, których wnętrza przecina przekątna



a=12 b=20 c=30 n=2 k=4 l=10 m=6

Strzałki wskazują miejsca, gdzie f ma skok o ≥2

jest przyrost [x] i [y], nie ma przyrostu [z]

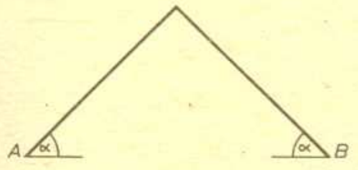
—"— [y] i [z] —"— [x]

—"— [z] i [x] —"— [y]

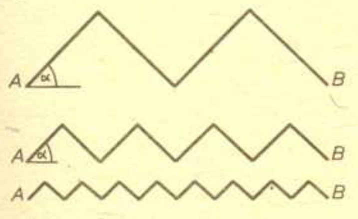
jednoczesny przyrost [x], [y] i [z]

$\overline{AZ}$, równa się liczbie przedziałów stałości funkcji f, czyli liczbie punktów nieciągłości (skoków) tej funkcji w przedziale $\langle 0,1\rangle$. (Rysunek przedstawia przebieg f, gdy $a = 12$, $b = 20$, $c = 30$.) Maksymalny skok f wynosi 3; skoków tych jest tyle, ile punktów kratowych (tj. o współrzędnych całkowitych), przez które przechodzi przekątna $\overline{AZ}$ (nie licząc punktu A); jest ich więc n, gdzie $n = \mathrm{NWD}(a,b,c)$. Liczymy teraz skoki o 2 pochodzące z przyrostu składników $[x]$ i $[y]$, przy niezmieniającym się $[z]$. Jest ich tyle, ile punktów $(x,y,z) \in \overline{AZ}$ o współrzędnych x i y całkowitych, a z niecałkowitej, czyli $k-n$, gdzie $k = \mathrm{NWD}(a,b)$. Analogicznie, skoków o 2 pochodzących, odpowiednio, z przyrostu składników $[y]$ i $[z]$ oraz $[z]$ i $[x]$ jest $l-n$ oraz $m-n$, gdzie $l = \mathrm{NWD}(b,c)$, $m = \mathrm{NWD}(c,a)$. Niech wreszcie j będzie liczbą skoków o 1. Pełny przyrost wartości f wynosi $a+b+c$, więc $3n+2(k-n)+2(l-n)+2(m-n)+j = a+b+c$, skąd $j = a+b+c-2(k+l+m)+3n$. Szukana liczba skoków f równa się zatem $n+(k-n)+(l-n)+(m-n)+j = a+b+c-(k+l+m)+n$.

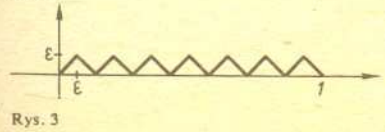
Z prądem pod wiatr



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Nie zawsze rozwiązanie problemu wariacyjnego musi istnieć. Rozważmy nawigacyjne zadanie Zermelo. Należy przepłynąć żaglówką pod wiatr z punktu A do punktu B, oba punkty leżą w środku nurtu rzeki, punkt B poniżej punktu A. Prąd rzeki jest najszybszy w środku. Jeśli pominiemy czas potrzebny na zmianę halsu, to przy braku prądu żeglarz może wybrać jedną z wielu łamanych (rys.2), gdzie α jest optymalnym dla prędkości wiatru kątem.

Jeśli jednak uwzględnimy prąd rzeki, to żeglarz powinien trzymać się jak najbliżej jej środka, tak więc im częściej zmienia kierunek, tym szybciej przepłynie swoją trasę.

Podobnie jest, jeśli chcemy znaleźć wśród takich funkcji $x\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, że $x(0) = x(1) = 0$ funkcję, dla której całka $I(x) = \int\limits_0^1 (x(t)^2+1)(1+((x'(t))^2-1)^2)\,dt$ przyjmuje wartość najmniejszą. (Dla uproszczenia dopuśćmy rozpatrywanie funkcji kawałkami różniczkowalnych.) Dla funkcji z rysunku 3 albo $x'(t) = 1$, albo $x'(t) = -1$. Zatem funkcja podcałkowa nie jest większa niż $1+\varepsilon^2$ i $I(x) \leqslant 1+\varepsilon^2$.

Z drugiej strony funkcja podcałkowa nigdzie nie może być mniejsza niż 1, a równa 1 tylko w punktach, dla których równocześnie $x(t) = 0$, $|x'(t)| = 1$.

Tak więc kres dolny wartości całki, czyli 1, nigdy nie będzie osiągnięty.

J. R.