

Przy rozwiązywaniu niektórych zadań z geometrii bardzo wygodnym narzędziem jest rachunek wektorowy. Oto jego zalety:  
 1° Wiele pojęć geometrycznych łatwo jest wyrazić za pomocą wektorów, np.: równoległość, prostopadłość, długość odcinka, pole trójkąta.  
 2° Rachunek wektorowy podlega prawom zwykłej algebry.

Jako przykład rozwiążemy zadanie 4 z zawodów III stopnia XVIII Olimpiady Matematycznej.

Przekątne pewnego czworokąta płaskiego, którego kolejne boki mają długości  $a, b, c, d$ , są prostopadłe. Udowodnić, że przekątne dowolnego czworokąta płaskiego, którego kolejne boki mają długości  $a, b, c, d$ , są prostopadłe.

Rozwiązanie. Niech  $ABCD$  będzie dowolnym czworokątem płaskim. Obliczymy iloczyn skalarny  $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$  wektorów, utworzonych przez jego przekątne.

$$\begin{aligned} AD^2 = \overline{AD}^2 &= (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \\ &+ 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + 2\overline{AB} \cdot \overline{CD} + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} = AB^2 + CD^2 - BC^2 + \\ &+ 2(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{CD}) = AB^2 + CD^2 - BC^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{BD}, \end{aligned}$$

$$\text{a stąd } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}(AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2).$$

Okazuje się, że iloczyn ten zależy tylko od długości boków czworokąta. Ponieważ prostopadłość przekątnych jest równoważna zerowaniu się tego iloczynu, więc w czworokącie, którego boki równe są bokom wyjściowego czworokąta, przekątne też muszą być prostopadłe, c.n.d.

Podamy teraz kilka zadań dla Czytelników.

1. Dane są w przestrzeni punkty  $A, B, C, D$ . Niech  $M$  oznacza środek odcinka  $\overline{AC}$ , zaś  $N$  — środek odcinka  $\overline{BD}$ . Udowodnić, że

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

(zadanie 8 z II Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych)

2. Dana jest w przestrzeni kula  $K$  i punkty  $A, B$  poza kulą takie, że odcinek  $\overline{AB}$  przecina wnętrze kuli. Udowodnić, że zbiór tych punktów  $P$ , dla których odcinki  $\overline{AP}$  i  $\overline{BP}$  są styczne do kuli  $K$ , zawarty jest w pewnej płaszczyźnie.

(zadanie 3 z zawodów II stopnia XXXI Olimpiady Matematycznej)

3. Udowodnić, że jeżeli punkt  $P$  przebiega okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$ , to wartość  $a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2$  jest stała ( $a, b, c$  są odpowiednio długościami boków leżących naprzeciw wierzchołków  $A, B, C$ ).

(6-II-XXXI)

4. Dana jest kula i wewnątrz niej punkt  $P$ . Punkty  $A, B, C$  są takimi dowolnymi punktami powierzchni tej kuli, że odcinki  $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$  są parami prostopadłe. Niech  $\overline{PQ}$  będzie przekątną wewnętrzną prostopadłościanu wyznaczonego przez odcinki  $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ . Wyznaczyć zbiór punktów  $Q$ .

(zadanie 2 z XX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej)

Sławomir TOMASZEWSKI



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 451.** Znaleźć liczbę dziesięciocyfrową, której pierwsza cyfra jest zarazem liczbą zer w jej zapisie dziesiętnym, druga liczbą jedynek i tak aż do ostatniej cyfry, która jest liczbą dziewiątek. Rozwiązanie na str. 7

**M 452.** Niech  $X$  będzie zmienną losową, przyjmującą wartości całkowite nieujemne, o następującej własności

$$P(X \geq m+n | X \geq m) = P(X \geq n) \text{ dla } m, n \in \mathbb{N}.$$

Znaleźć rozkład  $X$ .  
Rozwiązanie na str. 7

**M 453.** Boki wielokąta wypukłego o obwodzie  $p$ , „rozsunięto” o 1. Udowodnić, że przyrost pola jest większy niż  $p + \pi$ .  
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Maciej JĘDRZEJCZAK

**F 208.** Jaki kształt powinna mieć klepsydra (rysunek) wypełniona wodą, aby skala czasu była liniowa?  
Rozwiązanie na str. 6

**F 209.** Jakiej grubości warstwa lodu utworzy się na spokojnej powierzchni jeziora w ciągu 12 godzin, jeśli temperatura powietrza wynosi  $-10^\circ\text{C}$ , a początkowa temperatura wody  $0^\circ\text{C}$ . Współczynnik przewodnictwa cieplnego lodu  $\kappa = 2,2 \text{ J/K} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$ , ciepło topnienia  $L = 3,4 \times 10^5 \text{ J/kg}$ , a gęstość  $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ .  
Rozwiązanie na str. 4

