Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Pora na doroczne omówienie ligi zadaniowej. Po podsumowaniu punktów za zadania z matematyki z numerów $\leqslant 4/1986$ **Klub 44** M liczył 42 członków. Dwie osoby, które przekroczyły sumę 44 po ocenieniu zadań z numeru 5, „zaokrągliły'' tę liczbę do 44. A więc mamy jubileusz!
Jak co roku, drukujemy obszerniejszą tabelę ligową.
W następnych miesiącach będziemy znów podawać tylko ścisłą czołówkę (6—8 nazwisk). Zaprzestaniemy jednak podawania nazwisk tych uczestników, którzy osiągnąwszy stan konta bliski **44** punktów zatrzymali się i przestali przysyłać rozwiązania. Przyjmiemy zasadę, że nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie. Następny raz ukaże się dopiero wtedy, gdy wykona ruch w górę. Jedynie w noworocznym omówieniu będziemy stale ogłaszać obszerną czołówkę (około 60 nazwisk) w komplecie.

Korzystamy z okazji, by zwrócić się do Czytelników z prośbą o opinie na temat zadań ligowych, ich trudności i tematyki — czego brakuje, a czego jest, być może, za dużo — i o wszelkie uwagi dotyczące ligi zadaniowej. Prosimy przy tym, by ewentualne uwagi tego typu były pisane na oddzielnych kartkach (nie razem z rozwiązaniami zadań), a także oddzielnie od innej korespondencji kierowanej do redakcji *Delty*.
Uczestników startujących jednocześnie w lidze **M** i **F** prosimy ponadto o przysyłanie wszelkiej korespondencji (rozwiązań, propozycji, uwag) dla **M** i **F** w oddzielnych kopertach.
I jeszcze jedna prośba. Choć nie jest to wymagane regulaminem, miło nam, gdy uczestnik ligi, czy to w momencie rozpoczęcia swego udziału, czy to po jakimś okresie startów, decyduje się napisać parę słów o sobie (wiek, zawód, praca, inne dane, które mogą być interesujące). Zdecydowanie natomiast wymagamy, by każde rozwiązanie było podpisane imieniem i nazwiskiem.
Gdy ktoś chce poznać swoje oceny (patrz omówienie sprzed roku), powinien nam przysłać kartkę pocztową (oddzielną dla **M** i **F**), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen.
Przejdźmy do zadań z matematyki z ubiegłego roku.
W nielicznych tylko przypadkach udało się uczestnikom znaleźć rozwiązania wyraźnie zgrabniejsze od naszych, i to głównie w zadaniach najłatwiejszych (z czego by wynikało, że my mamy skłonność do zbędnego komplikowania rzeczy prostych...).
Za to nierzadko były znajdowane interesujące uogólnienia.
Jak co roku, przedstawiamy szkice ciekawszych rozwiązań i uogólnień oraz odnotowujemy zadania, które zostały rozwiązane prawidłowo przez niewielką liczbę uczestników. Brak komentarza przy informacji o rozwiązaniach oznacza, że nie odbiegają one w istotny sposób prostotą ani ogólnością od rozwiązań podanych przez nas.

Zadanie 109 [Wielomiany o współczynnikach ± 1 i pierwistkach wyłącznie rzeczywistych] ($WT = 3{,}33$) rozwiązali poprawnie tylko M. Mazur, A. Pawłowski, T. Szymczyk, P. Figurny, P. Jędrzejewicz, Z. Koza, D. Kurpiel.

Zadanie 111 [Zbiór wypukły ograniczony w $\mathbf{R}^3$, nie będący kulą, którego brzeg ma w każdym punkcie płaszczyznę styczną i przez którego każdy punkt przechodzi średnica] ($WT = 3{,}60$). Przykład (taki sam, jak w rozwiązaniu w *Delcie*) skonstruowali: M. Gałecki, J. Janowicz, Z. Koza (z dowodem) oraz J. Ciach, T. Józefczyk, K. Kowalkowski (bez dowodu). Ponadto T. Rawlik dał dobry przykład: koło(!) — sprytnie wykorzystując przeoczenie w sformułowaniu treści (brak żądania, by zbiór miał niepuste wnętrze).

Zadanie 117 [Dla czworościanów $A_1A_2A_3A_4$ opisanych na kuli $K(O, 1)$, $OA_1 \geqslant \ldots \geqslant OA_4$, $\inf OA_i = ?$] ($WT = 3{,}31$). Tylko D. Kurpiel, K. Serbin, T. Szymczyk, M. Gałecki, M. Mazur, J. Uryga, Z. Galias, J. Janowicz, P. Jędrzejewicz.

Zadanie 114 [$a_n > 0$, $x_n = (a_1 \ldots a_n)^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow a_{n+1} + \ldots + a_{n+m} \geqslant$ $\geqslant (n+m)x_{n+m} - nx_n$] ($WT = 2{,}18$) ma bardzo proste rozwiązanie, znalezione przez wielu uczestników:

$$\frac{1}{n+m}(nx_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}) \geqslant (x_n^n a_{n+1} \ldots a_{n+m})^{\frac{1}{n+m}} = x_{n+m}.$$

Zadanie 118 [$x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{N}$ nieparzyste $\Rightarrow \sum x_i^{p+1} \sum x_i^{p-1} \geqslant (\sum x_i^p)^2$] ($WT = 1{,}15$). Komentarz jak wyżej; natychmiastowy dowód z nierówności Schwarza $(\sum u_i v_i)^2 \leqslant \sum u_i^2 \sum v_i^2$ zastosowanej do liczb $u_i = x_i^{(p+1)/2}$, $v_i = x_i^{(p-1)/2}$.

Zadanie 122 [$f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbf{R}$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, gdy $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$; wyznaczyć f] ($WT = 2{,}02$). Sytuacja, jak w poprzednich dwóch zadaniach. Krótkie rozwiązanie: ustalmy $x \in \mathbf{N}$ i niech (p_n) będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych $> x$; wtedy $f(xp_n) = f(x) + f(p_n)$ i w granicy $g = f(x) + g$, skąd $f \equiv 0$.

Zadanie 124 [$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ wektory o długości $1 \Rightarrow$ któryś z wektorów $\pm\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v}\pm\boldsymbol{w}$ ma długość $\leqslant 1$] ($WT = 2{,}75$) zostało rozwiązane poprawnie przez ponad 20 uczestników. Wyróżniamy za urodę i oryginalność dwa rozwiązania:
I (P. Jędrzejewicz). Sformułowanie równoważne: Dane 3 proste przechodzące przez wspólny punkt $O \Rightarrow$ istnieją punkty A, B, C, po jednym na każdej z tych prostych, takie, że $OA = OB = OC = 1$, $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| \leqslant 1$. Pomijamy przypadek trywialny, gdy dwie (lub trzy) proste pokrywają się. Rozbijamy każdą prostą na dwie półproste (o początku O) i obieramy punkty A, B, C na „co drugiej'' z powstałych sześciu półprostych. Trójkąt ABC jest wówczas ostrokątny. O jest środkiem koła opisanego $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, gdzie H — ortocentrum trójkąta ABC. Wobec ostrokątności, $H \in \mathrm{int}ABC \Rightarrow OH < 1$.
II (M. Gałecki). Możemy przyjąć, że $\boldsymbol{v} \neq \pm\boldsymbol{w}$. Niech $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OS}$. Końce wektorów $\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v}\pm\boldsymbol{w}$ są wierzchołkami rombu o boku 2 i środku $S \in \omega$, gdzie $\omega = o(O, 1)$. Należy dowieść, że jeden z wierzchołków leży w kole K ograniczonym okręgiem ω. Półprosta $SO^{\rightarrow}$ przecina brzeg rombu w punkcie $P \in K$. Niech P leży na boku $\overline{AB}$ i niech proste SA, SB przecinają ω (poza punktem S) w punktach E, F (w razie styczności, $E = S$ lub $F = S$). Ponieważ $SA \perp SB$, punkty E i F są końcami średnicy okręgu ω. Odcinek $\overline{AB}$ przecina półprostą $SO^{\rightarrow}$, więc $A \in SE^{\rightarrow}$; $B \in SF^{\rightarrow}$ i z równości $AB = 2 = EF$ wnosimy, że $A \in \overline{SE}$ lub $B \in \overline{SF}$. Stąd $A \in K$ lub $B \in K$.

Zadanie 125 [Cykliczne uporządkowanie pewnego zbioru ciągów skończonych z relacją bliskości] ($WT = 2{,}94$). Dwanaście dobrych rozwiązań. S. Solecki znalazł takie uogólnienie: Niech

$$Z = Z(m_1, \ldots, m_n) = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in \{1, \ldots, m_i\},\ i = 1, \ldots, n\};$$
$$\text{ciągi } (x_1, \ldots, x_n),\ (y_1, \ldots, y_n) \text{ są bliskie} \Leftrightarrow \sum |x_i - y_i| = 1.$$

Istnienie cyklicznego uporządkowania zbioru Z, przy którym sąsiednie ciągi są bliskie, jest równoważne alternatywie warunków: a) $\sum m_i \in \{n, n+1\}$, b) istnieją $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, takie, że m_i jest parzyste, a $m_j > 1$.

Zadanie 128 [Istnienie p punktów (p — liczba pierwsza) bez trójki współliniowej w zbiorze $\{(x, y)\colon x, y \in \{1, \ldots, p\}\}$] ($WT = 3{,}16$) rozwiązali poprawnie: A. Bonk, P. Jędrzejewicz, M. Mazur, H. Mikołajczak, J. Mikuta, Z. Surduka, Z. Koza. W jednym z listów znaleźliśmy nawet dowód tezy bez założenia, że p jest liczbą pierwszą, niestety, niepoprawny. A szkoda; nie wiadomo bowiem, czy w tej ogólności twierdzenie zachodzi — jest to otwarty problem (tzw. *no-three-in-line* problem). Jeśli przez $M(n)$ oznaczymy maksymalną liczbę punktów bez trójki współliniowej w kwadracie kratowym $n \times n$, a przez $N(n, M)$ — liczbę różnych rozmieszczeń M takich punktów, to zgodnie z tezą zadania $M(n) \geqslant n$, gdy n jest liczbą pierwszą (spostrzeżenie pochodzące od P. Erdösa). Jednak — poza oczywistym oszacowaniem $M(n) \leqslant 2n$ — nic więcej nie wiadomo o zachowaniu wielkości $M(n)$ dla dużych n, mimo że eksperymentalnie stwierdzono w przybliżeniu wykładniczy wzrost wielkości $N(n, 2n)$ dla n niezbyt wielkich! (zob. artykuł R. K. Guya w książce *Combinatorial Mathematics and Its Applications*, Acad. Press, London, New York 1971 str. 124 — cyt. za p. J. Celem, który zadanie zaproponował).

Zadanie 129 [Czy w sześciokącie wypukłym o polu S musi istnieć przekątna odcinająca trójkąt o polu $\leqslant S/6$? $\geqslant S/6$?] ($WT = 3{,}18$). Tylko P. Jędrzejewicz, D. Kurpiel, J. Uryga, J. Klisowski, P. Kumor, Z. Galias.

Zadanie 130 [$\inf\limits_{m,n\in N}(m^{-1/n}+n^{-1/m})=?$] ($WT=1{,}71$). Dużo poprawnych rozwiązań. Dwa ciekawe uogólnienia:

I (P. Jędrzejewicz). $\inf\limits_{x,y\in(0,1]}(x^y+y^x)=1$. Dowód z nierówności między średnią arytmetyczną ważoną i średnią geometryczną ważoną

$$\left(\sum q_i u_i \geqslant \prod u_i^{q_i} \text{ dla } u_1,\dots,u_n>0,\ q_1,\dots,q_n\geqslant 0,\ \sum q_i=1\right):$$

$$x^y+y^x=\left(\left(\frac{1}{x}\right)^y\cdot 1^{1-y}\right)^{-1}+\left(\left(\frac{1}{y}\right)^x\cdot 1^{1-x}\right)^{-1}\geqslant$$

$$\geqslant\left(y\cdot\frac{1}{x}+(1-y)\cdot 1\right)^{-1}+\left(x\cdot\frac{1}{y}+(1-x)\cdot 1\right)^{-1}>1.$$

II (J. Kaja). Niech $A\subset(1,\infty)$, $\sup A=\infty$, $k\in N$,

$$Z=\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)-a_j\right)^{-1/a_j}: a_1,\dots,a_k\in A\right\}.$$

Wówczas $\inf Z=1$. Dowód z uogólnionej nierówności Bernoulliego ($(1+x)^t\geqslant 1+tx$ dla $x\geqslant 0,\ t>1$) przez podstawienie $t=a_j$, $x=a_j^{-1}((\sum a_j)-a_j-1)$, $j=1,\dots,n$, proste przekształcenie i zsumowanie powstałych nierówności.

Zadanie 132 [$(\sum\limits_i\prod\limits_j a_{ij})^k\leqslant\prod\limits_j\sum\limits_i a_{ij}^k (a_{ij}>0,\ i\leqslant n,\ j\leqslant k)$] ($WT=1{,}71$) było rozwiązywane na wiele sposobów: tak, jak w *Delcie*, bądź przez indukcję (po k, po n), indukcję wsteczną ($k\to 2k,\ k\to k-1$), pracowite wymnażanie sum, wreszcie stosowanie znanych nierówności (Jensena, Höldera). Przytoczona w omówieniu zadania **130** nierówność między średnimi ważonymi posłużyła M. Mazurowi (który zresztą to zadanie zaproponował) i R. Mitraszewskiemu do uzyskania uogólnienia w postaci

$$\sum_i\prod_j a_{ij}\leqslant\prod_j\left(\sum_i a_{ij}^{q_j}\right)^{1/q_j} \text{ dla } a_{ij}>0,\ q_j>0,\ \sum 1/q_j=1;$$

dla $k=2$ nierówność ta redukuje się do zwykłej nierówności Höldera (a nierówność wyjściowa — do nierówności Schwarza).

Zainicjowana przed dwoma laty liga fizyczna zdążyła się już na dobre zadomowić na łamach *Delty* i okrzepnąć. Przez pierwsze półtora roku jej istnienia uczestniczyło w niej ponad 120 osób, jest też już pierwszy członek **Klubu 44** w tej konkurencji. Wśród uczestników (którzy zechcieli się bliżej przedstawić) tak jak przed rokiem przeważają uczniowie i studenci. Spory wzrost liczby nadsyłanych prac nastąpił po wydrukowaniu w numerze 1/1986 omówienia początków działalności oraz pierwszej tabeli ligowej. Liczymy na podobne skutki obecnego, kolejnego podsumowania.

Lektura nadsyłanych rozwiązań skłania nas do zamieszczenia paru, zdawałoby się oczywistych, rad:

1. Na gotowe rozwiązanie zadania powinno się spojrzeć krytycznie, by stwierdzić, czy na pewno wynik ma sens fizyczny (np. mogliśmy pomylić się w przekształceniach).
2. Wyznaczane wielkości „liczbowe" należy podawać z dokładnością odpowiadającą dokładności zastosowanej metody oraz użytych danych wyjściowych (w treści zadań podajemy je zwykle z dokładnością do dwóch miejsc znaczących, taką samą dokładność proponujemy stosować podczas korzystania z tablic). Pamiętajmy o jednostkach!

A teraz omówienie wybranych zadań.

Zadanie 11 [Wyznaczanie masy przedmiotu zawieszonego wewnątrz gablotki] ($WT=2{,}63$). Wszyscy rozwiązujący podali (przynajmniej obok innych metod) metody wykorzystujące drgania przedmiotu na sprężynie, ewentualnie drgania całej gablotki, zawieszonej na sprężynie o znanej stałej sprężystości (jak podali P. Figurny i T. Rawlik, układ ten ma dwie częstości rezonansowe). Najładniejsze rozwiązanie podał M. Semla: gablotkę z przedmiotem wprawionym w drgania pionowe o amplitudzie A stawiamy na szybko reagującej wadze i odczytujemy amplitudę wahań ciężaru F, stąd znajdujemy stałą sprężystości zawieszenia przedmiotu $k=F/A$. Znając dodatkowo okres drgań przedmiotu T wyznaczamy jego masę jako

$$m=\frac{kT^2}{4\pi^2}=\frac{T^2F}{4\pi^2A}.$$

Zadanie 15 [Pętla z izolowanego przewodu w zanikającym polu magnetycznym] ($WT=3{,}10$). Rozwiązania zbliżone do naszego nadesłali W. Bartz, M. Semla, L. Szalast, P. Zawadzki. W rozwiązaniu opublikowanym w numerze 2/1986 powinno się dla poprawności toku rozumowania umieścić między punktami P i S opornik, odpowiadający izolacji dzielącej dwa przewody w miejscu ich styku. Dzięki dużej wartości oporu nie będzie on wpływał na występujące w pętli napięcia i prądy, jego umieszczenie spowoduje natomiast, że omawiane obwody przyjmą postać dwóch zamkniętych oczek. Jest to o tyle ważne, że siła elektromotoryczna indukuje się w obwodach zamkniętych (chociażby przerwą iskrową); dla obwodu nie zamkniętego strumień indukcji magnetycznej nie jest określony. W omawianym rozwiązaniu przyjęto za promienie okręgów podane w treści zadania wartości średnic. Wpłynęło to na końcowe wartości napięć, nie zmieniając jednak ostatecznego wniosku.

Zadanie 17 [Przesuwanie po podłożu pręta z górnym końcem mocowanym w więzach prostoliniowych] ($WT=1{,}65$) pomimo niskiej wartości WT nastręczało poważne trudności. Świadczy o tym mała liczba nadesłanych rozwiązań oraz fakt, że niektórzy czołowi uczestnicy ligi mieli wiele trudności z poprawnym rozłożeniem wszystkich sił i sformułowaniem warunków, które siły muszą spełniać. Otrzymaliśmy nawet list od Czytelnika wytykający nam rzekomy błąd w rozwiązaniu zamieszczonym w numerze 3/1986. Rozwiązanie to jednak, jeśli tylko nie liczyć pewnych niedokładności rysunków, jest poprawne.

Zadanie 21 [Elektryczna czarna skrzynka] ($WT=1{,}96$) zostało przez kilku uczestników (R. Pluta, J. Stelmach, T. Wieczorek) rozwiązane z użyciem źródeł prądowych. Niestety, tylko jedno z nich (T. Wieczorka) było satysfakcjonujące. Mniej więcej w połowie nadesłanych rozwiązań zastosowano układ „gwiazdy".

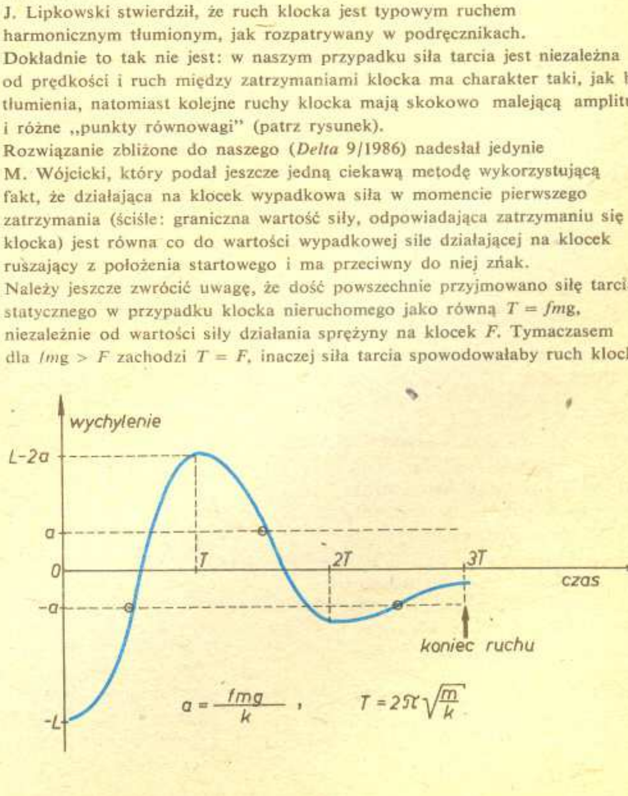
Zadanie 22 [Przelewanie cieczy lewarem] ($WT=3{,}81$) okazało się najtrudniejsze w minionym roku. Tylko J. Osada zwrócił uwagę na rolę ciśnienia pary nasyconej cieczy, natomiast opory przepływu jako jedyny uwzględnił J. Stelmach.

Zadanie 26 [Pocisk wystrzelony z Księżyca] ($WT=2{,}27$). Dz. Lipniacki rozpatrywał ruch pocisku w nieinercjalnym układzie związanym z Ziemią i Księżycem, co znacznie komplikuje problem. Przy okazji poprawiamy błędy liczbowe, które wystąpiły w naszym rozwiązaniu (*Delta* 7/1986): największa odległość, na którą może pocisk oddalić się od powierzchni Księżyca, wynosi $1/5R$, a przyciąganie ziemskie jest na całym torze pocisku co najmniej 400 razy mniejsze od przyciągania Księżyca.

Zadanie 29 [Ruch klocka pod wpływem działania sprężyny i tarcia] ($WT=1{,}70$). W większości nadesłanych rozwiązań (m.in. P. Miłoszewski, J. Osada, L. Szalast, P. Wach) wykorzystano zasadę zachowania energii: przyrównując pracę wykonaną na pokonanie siły tarcia $W=fmgs$ (f — współczynnik tarcia, m — masa klocka, g — przyspieszenie ziemskie, s — szukane przesunięcie klocka) do różnicy energii sprężyny w pozycji pierwotnej i końcowej $\Delta E=\frac{1}{2}k(L^2-x^2)$ (x — odkształcenie sprężyny w końcowym położeniu klocka) otrzymuje się

$$s=2\left(L-\frac{fmg}{k}\right) \text{ dla } L>\frac{fmg}{k} \text{ oraz } s=0 \text{ dla } L\leqslant\frac{fmg}{k}.$$

Kilku uczestników (A. Gluza, Dz. Lipniacki, J. Soboń) rozwiązywało równanie ruchu klocka, co było metodą bardzo pracochłonną. J. Lipkowski stwierdził, że ruch klocka jest typowym ruchem harmonicznym tłumionym, jak rozpatrywany w podręcznikach. Dokładnie to tak nie jest: w naszym przypadku siła tarcia jest niezależna od prędkości i ruch między zatrzymaniami klocka ma charakter taki, jak bez tłumienia, natomiast kolejne ruchy klocka mają skokowo malejącą amplitudę i różne „punkty równowagi" (patrz rysunek). Rozwiązanie zbliżone do naszego (*Delta* 9/1986) nadesłał jedynie M. Wójcicki, który podał jeszcze jedną ciekawą metodę wykorzystującą fakt, że działająca na klocek wypadkowa siła w momencie pierwszego zatrzymania (ściśle: graniczna wartość siły, odpowiadająca zatrzymaniu się klocka) jest równa co do wartości wypadkowej sile działającej na klocek ruszający z położenia startowego i ma przeciwny do niej znak. Należy jeszcze zwrócić uwagę, że dość powszechnie przyjmowano siłę tarcia statycznego w przypadku klocka nieruchomego jako równą $T=fmg$, niezależnie od wartości siły działania sprężyny na klocek F. Tymczasem dla $fmg>F$ zachodzi $T=F$, inaczej siła tarcia spowodowałaby ruch klocka!



Klub 44

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 131 ($WT = 2{,}00$) i 132 ($WT = 1{,}71$)

Zbigniew Galias	— Kraków	45,62
Robert Mitraszewski	— Wrocław	45,19
Marian Roman	— Ełk	1—43,09
Zbigniew Koza	— Jelenia Góra	1—43,03
Andrzej Sudoł	— Nowy Sącz	42,56
Tomasz Rawlik	— Gliwice	2—41,48
Marek Prauza	— Poraj	1—41,30
Jerzy Mikuta	— Zielona Góra	1—40,50
Grzegorz Kuś	— Kraków	39,93
Henryk Mikołajczak	— Wałbrzych	39,26
Zbigniew Zaus	— Kraków	36,93
Michał Marczak	— Radom	36,56
Wojciech Krzyżański	— Żywiec	34,45
Edward Orzechowski	— Warszawa	2—34,31
Artur Smolczyk	— Tarnów Op.	1—33,68
Sławomir Solecki	— Ostrów Wlkp.	1—33,35
Jerzy Tyszkiewicz	— Warszawa	33,28
Zygmunt Bartkowski	— Warszawa	32,93
Mariusz Łopusiewicz	— Legnica	32,15
Mirosław Mikucki	— Augustów	31,67
Piotr Figurny	— Lubartów	1—31,39
Krzysztof Jakubczak	— Kudowa Zdrój	31,00
Dariusz Kowalczyk	— Warszawa	29,81
Krzysztof Jedziniak	— Katowice	1—29,49
Władysław Wasiak	— Toruń	28,92
Jarosław Kaczyński	— Starogard Gd.	28,31
Stanisław Dorosz	— Kraków	28,06
Maciej Głuszek	— Wrocław	27,85
Janusz Prajs	— Opole	27,57
Jan Ciach	— Ostrowiec Św.	1—27,21
Tomasz Komorowski	— Świdnik	2—26,82
Tadeusz Józefczyk	— Poznań	1—26,60
Jerzy Cisło	— Wrocław	26,56
Radosław Zapert	— Kielce	26,51
Krzysztof Zygan	— Lubin	24,98
Adam Stadler	— Rzeszów	24,94
Zbigniew Kryłow	— Sopot	24,93
Mirosław Matlęga	— Skoczów	24,82
Karol Jachacy	— Tłuszcz	24,67
Tomasz Masłowski	— Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	— Warszawa	1—24,31
Jerzy Małopolski	— Kraków	1—24,23
Adam Wyrwa	— N. Wiśnicz	1—23,43
Lech Bartłomiejczyk	— Gliwice	22,50
Ryszard Pagacz	— Zawadzkie	2—22,16
Małgorzata Czerniakowska	— Gdańsk	1—20,54
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	20,07
Józef Siwy	— Łaziska G.	1—19,73
Paweł Kamiński	— Warszawa	4—19,58
Piotr Wach	— Katowice	19,03
Piotr Jędrzejewicz	— Toruń	1—19,00
Jerzy Janowicz	— Bolesławiec	5—18,76
Adam Ruszel	— Krosno	18,72

Legenda (przykładowo): stan konta 5—18,76 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył **44** punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 18,76 p.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 18 punktów.

Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie) (cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów): Z. Bartold (2), T. Biegański (1), A. Bonk (1), W. Boratyński (1), M. Fiszer (1), M. Gałecki (5), A. Gluza (1), D. Kurpiel (1), J. Mańdziuk (1), M. Mazur (2), R. Mazurek (1), J. Milczarek (1), W. Olszewski (1), A. Pawłowski (3), K. Serbin (2), D. Sowizdrzał (3), T. Szymczyk (1), W. Szymczyk (1), J. Uryga (4), K. Witek (1).

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.
2. Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po 4 zadania w każdym numerze: 2 z matematyki i 2 z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przesyłaniu opracowanych rozwiązań do Redakcji *Delty*. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przesłać rozwiązanie choćby jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12, np. termin nadsyłania rozwiązań zadań z nr 11/1987 upływa 31 stycznia 1988). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.
8. Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednobrzmiących nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten jest liczbą między 1 a 4 ustaloną według następującej zasady: jeżeli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4-3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).
11. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) są sumowane, oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.
12. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
13. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.
14. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*.
15. Członkowie **Klubu 44** będą zapraszani na spotkania **Klubu 44**, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.
16. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian Regulaminu.

Zadania z matematyki nr 143, 144

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

143. We wnętrzu kwadratu rozmieszczono w dowolny sposób skończoną liczbę rozłącznych kół domkniętych (o różnych promieniach). Udowodnić, że można ten kwadrat podzielić na wielokąty wypukłe o rozłącznych wnętrzach tak, by we wnętrzu każdego wielokąta znalazło się dokładnie jedno z kół.

144. Dowieść, że równanie $1987y^2 = 1+x+x^2+x^3+x^4$ nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych x, y.

Zadanie **144** przysłał pan Jarosław Cel z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1986

Przypominamy treść zadań:

135. Okręgi K i L są wpisane w ramiona kąta o wierzchołku O. Trzeci okrąg jest styczny zewnętrznie do K i L w punktach P i Q. Dowieść, że punkty O, P, Q są współliniowe.

136. Udowodnić, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych a) liczb naturalnych, b) liczb parzystych, c) liczb nieparzystych — można przedstawić na dwa różne sposoby jako różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych.

135. Niech O_1, O_2, r_1, r_2 oznaczają odpowiednio środki i promienie okręgów K i L; przez O_3, r_3 oznaczmy środek i promień trzeciego okręgu. Jednokładność o środku O i skali r_2/r_1 przeprowadza okrąg K na okrąg L; stąd proporcja $OO_2:OO_1 = r_2:r_1$. Punkty P i Q leżą na bokach $\overline{O_1O_3}$ i $\overline{O_3O_2}$ trójkąta $O_1O_3O_2$, a punkt O leży na przedłużeniu boku $\overline{O_1O_2}$. Z równości $\frac{O_1P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_2}\cdot\frac{O_2O}{OO_1} = \frac{r_1}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_1} = 1$ na mocy twierdzenia Menelausa wynika współliniowość punktów P, Q i O.

136. Dla dowolnych liczb a, b, x, y i dla $\varepsilon = \pm 1$ zachodzi równość

$$(ab+\varepsilon xy)^2-(bx+\varepsilon ay)^2 = (a-x)(a+x)(b-y)(b+y).$$

Gdy a, b, x, y są liczbami naturalnymi, otrzymujemy przedstawienie iloczynu po prawej stronie w postaci różnicy dwóch kwadratów na dwa różne sposoby przyjmując $\varepsilon = 1$ oraz $\varepsilon = -1$. Dla $b = a+x$, $y = x$ dostajemy po prawej stronie iloczyn $(a-x)a(a+x)(a+2x)$; przy stosownym wyborze wartości a, $x \in \mathrm{N}$ $(0 < x < a)$ czynnikami tego iloczynu będą dowolnie zadane cztery liczby naturalne w postępie arytmetycznym. Stąd teza zadania w każdym z trzech przypadków.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1987

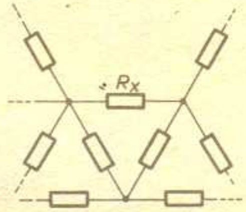
Zadania z fizyki nr 41, 42

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

41. Fotografując z brzegu jeziora o gładkiej powierzchni przeciwległy brzeg otrzymano obraz tego brzegu wraz z jego odbiciem w wodzie, jak na rysunku 1. W jaki sposób można określić, co jest odbiciem w wodzie, jeśli obie połowy zdjęcia nie różnią się pod względem ostrości ani jasności?

42. Rysunek 2 przedstawia fragment sieci złożonej z oporów o nie znanych wartościach. W jaki sposób można wyznaczyć wartość oporu R_x nie przerywając nigdzie sieci, jeśli dysponuje się tylko omomierzem i przewodami do połączeń? Wyprowadzić odpowiedni wzór.

Rys. 1



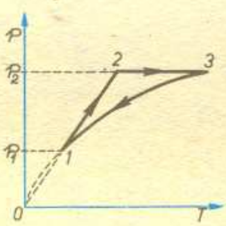
Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1986

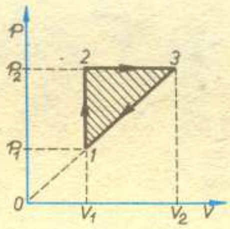
Przypominamy treść zadań:

33. Gaz doskonały (jednoatomowy) podlega odwracalnemu procesowi kołowemu, dla którego zależność ciśnienia p od temperatury T jest przedstawiona na rysunku 3 (odcinek 1—3 opisywany jest zależnością $p = \text{const}\cdot\sqrt{T}$). Podać wykres zależności ciśnienia od objętości dla tego procesu i obliczyć sprawność silnika cieplnego realizującego taki cykl, w którym $p_2 = 2p_1$. Czy dla gazu dwuatomowego wynik będzie taki sam?

34. Posługując się argumentacją fizyczną ocenić, jaka część wokółsłonecznego toru Księżyca ma wypukłość zwróconą ku Słońcu.



Rys. 3



Rys. 4

33. Zależność ciśnienia od objętości dla danego procesu przedstawia rysunek 4. Przemiana 3—1 jest opisywana zależnością $p \sim V$, wówczas bowiem — ze względu na równanie Clapeyrona — zachodzi $p^2 \sim T$. Mamy więc $V_2/V_1 = p_2/p_1 = 2$. Stosunki temperatur w odpowiednich punktach cyklu wynoszą: $T_2/T_1 = p_2/p_1 = 2$, $T_3/T_1 = (p_2/p_1)^2 = 4$.
Sprawność silnika cieplnego wynosi

(1) $$\eta = \frac{W}{Q},$$

gdzie W — praca wykonana przez gaz w jednym cyklu,
Q — ciepło pobrane przez gaz w jednym cyklu.
Praca W jest różnicą pracy wykonanej przez gaz w przemianie 2—3 i pracy wykonanej nad gazem w przemianie 3—1.
Wartości W odpowiada pole powierzchni zakreskowanego trójkąta na rysunku 4:

(2) $$W = \frac{1}{2}p_1V_1 = \frac{1}{2}nRT_1$$ (n — liczba moli gazu, R — stała gazowa).

Gaz pobiera ciepło w przemianach 1—2 oraz 2—3 (w przemianie 3—1 oddaje ciepło). Wobec tego

$$Q = n[C_V(T_2 - T_1) + C_p(T_3 - T_2)]$$

(C_V i C_p — molowe ciepło właściwe gazu odpowiednio przy stałej objętości oraz przy stałym ciśnieniu).

Po dokonaniu podstawień $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$ (dla gazu jednoatomowego) oraz $T_2 = 2T_1$, $T_3 = 4T_1$ otrzymujemy

(3) $$Q = \frac{13}{2}nRT_1.$$

Ostatecznie ze wzorów (1), (2), (3) wyznaczamy $\eta = \frac{1}{13}$. Dla gazu dwuatomowego mamy $C_V = \frac{5}{2}R$ oraz $C_p = \frac{7}{2}R$, zatem $Q = \frac{19}{2}nRT_1$. Praca W jest nadal opisywana wzorem (2) i w rezultacie $\eta = \frac{1}{19}$.

34. Rozwiązanie w artykule dr. Tomasza Kwasta.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 29 ($WT = 1{,}70$) i 30 ($WT = 2{,}52$)

Tomasz Rawlik	— Gliwice	36,85
Aleksander Surma	— Myszków	31,77
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	30,20
Paweł Rogocz	— Legnica	23,63
Anna Gluza	— Toruń	21,65
Jacek Stelmach	— Zabrze	18,49
Robert Repucha	— Gołdap	17,58
Piotr Bała	— Toruń	1—15,34
Mirosław Semla	— Opole	15,20
Janusz Osada	— Legnica	15,17
Piotr Wach	— Katowice	14,95
Leszek Szalast	— Radzyń Podl.	14,14
Zbigniew Galias	— Kraków	12,48
Maciej Stasiak	— Człuchów	12,15
Wiesław Stochmal	— Szczecin	11,88
Zbigniew Lipowczan	— Katowice	11,81
Mariusz Surma	— Kielce	10,18
Piotr Dziembaj	— Kraków	10,05
Maciej Krzyżanowski	— Lublin	8,58
Wiesław Kacprzak	— Kraków	8,46
Tadeusz Foszcz	— Ilmenau (NRD)	8,15
Maciej Głuszek	— Wrocław	8,11

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 8 punktów.
Jedynka przed stanem konta P. Bały oznacza, iż zdobył on już raz 44 punkty i obecnie odbywa drugą rundę.