# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 31 /WT=1,65/ i 32 /WT=3,31/ z numeru 8/1986

| | | |
|---|---|---|
| Tomasz Rawlik | - Gliwice | 37,84pkt |
| Dzierżysław Lipniacki | - Lublin | 35,00pkt |
| Aleksander Surma | - Myszków | 34,26pkt |
| Anna Gluza | - Toruń | 24,63pkt |
| Paweł Rogocz | - Legnica | 23,63pkt |
| Jacek Stelmach | - Zabrze | 20,80pkt |
| Piotr Bała | - Toruń | 20,14pkt |
| Robert Repucha | - Gołdap | 19,23pkt |

### Skrót regulaminu

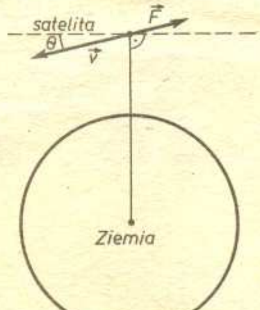
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1987

### Zadania z fizyki nr 43, 44

*Redaguje dr Andrzej NADOLNY*

**43.** Bombę kalorymetryczną napełniono w temperaturze 18°C mieszaniną tlenu i metanu pod ciśnieniem 1 MPa, przy czym ciśnienia cząstkowe obu gazów były jednakowe. Po szczelnym zamknięciu bomby wywołano w niej reakcję spalania metanu. Jakie ciśnienie będzie panowało w bombie po jej ostygnięciu do pierwotnej temperatury?



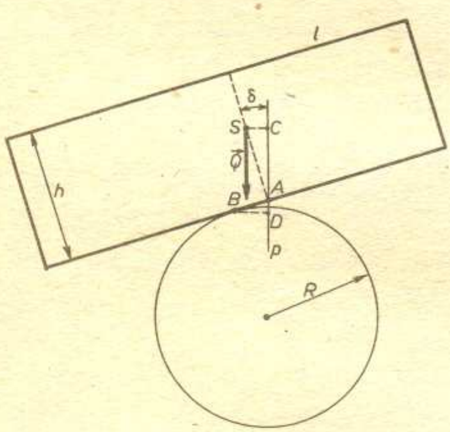

**44.** Wiadomo, że hamowanie przez górne warstwy atmosfery wpływa na tory sztucznych satelitów powodując ich stopniowe przybliżanie się do powierzchni Ziemi, czemu — paradoksalnie — towarzyszy wzrost prędkości. Przyjmując, że tor satelity ma kształt spirali o stałym kącie pochylenia $\Theta$ (rysunek), wykazać, że między składową przyspieszenia w kierunku ruchu $\boldsymbol{a}_r$ a siłą oporów $\boldsymbol{F}$ zachodzi związek $m\boldsymbol{a}_r = -\boldsymbol{F}$ ($m$ — masa satelity). Wyjaśnić pozorną sprzeczność z drugą zasadą dynamiki.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1986

Przypominamy treść zadań:

35. Na unieruchomionym, poziomym walcu o promieniu $R$ znajduje się jednorodna, prostopadłościenna belka o długości $l$ i grubości $h$, oparta na walcu w środku swej długości i prostopadła do osi walca. Czy takie położenie belki jest położeniem równowagi trwałej, chwiejnej czy obojętnej? Czy rodzaj równowagi zależy od wymiarów belki, a jeżeli tak, to w jaki sposób? Zakładamy, że między belką a walcem nie ma poślizgu.

36. Jak wygląda świat nadwodny widziany z rybiej perspektywy? Podać rozwartość kąta, pod jakim oko umieszczone na pewnej głębokości pod powierzchnią wody widzi świat nadwodny i opisać ewentualne zniekształcenia obrazu.



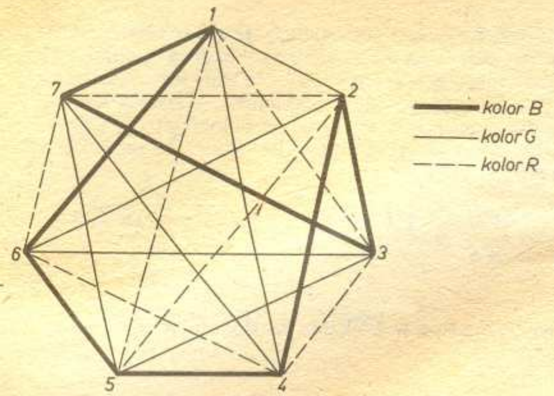

**35.** Oznaczmy początkowy punkt podparcia belki (na środku podstawy) przez $A$. Po odchyleniu belki z pierwotnego położenia poziomego o mały kąt $\delta$ styka się ona z walcem w punkcie $B$ (rysunek). Wobec braku poślizgu zachodzi $AB = R\delta$. Oznaczając środek ciężkości belki przez $S$ mamy $SA = h/2$. Niechaj $p$ będzie pionową prostą przechodzącą przez punkt $A$, a $C$ i $D$ — odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów $S$ i $B$ na tę prostą. Jak wynika z rysunku ($Q$ oznacza siłę ciężkości belki), rodzaj równowagi zależy od wartości stosunku długości odcinków $SC$ i $BD$:

$$k = \frac{SC}{BD} = \frac{SA\sin\delta}{BA\cos\delta} = \frac{h}{2R}\,\frac{\operatorname{tg}\delta}{\delta}.$$

Ponieważ dla kątów $\delta$ dążących do zera $\operatorname{tg}\delta/\delta$ dąży do jedności, pozostając jednak większe od jedności, równowaga trwała ($k < 1$) zachodzi dla $h < 2R$, natomiast dla $h \geqslant 2R$ mamy $k > 1$ i równowaga jest chwiejna. Jak widać, rozwiązanie nie zależy od długości belki.

**36.** Jakościowy opis zjawiska wraz z rysunkami zawiera *Mała Delta*. Wartość kąta granicznego $\alpha_{gr} = 48°,5$ oblicza się na podstawie prawa załamania ze wzoru $\sin\alpha_{gr} = \frac{1}{n}$, gdzie $n$ jest współczynnikiem załamania wody. W pobliżu horyzontu dla rosnących kątów padania światła $\beta$ tej samej odległości kątowej $\Delta\beta$ odpowiadają różne, coraz mniejsze kąty widzenia $\Delta\alpha$:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = \frac{\cos\beta}{\sqrt{n^2-\sin^2\beta}}.$$




Rys. 1

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | B | R | B | G | G | R |
| 6 | B | G | G | R | B | |
| 5 | R | R | G | B | | |
| 4 | G | B | R | | | |
| 3 | R | B | | | | |
| 2 | G | | | | | |

Rys. 2

## Zadania z matematyki nr 145, 146

*Redaguje dr Marcin E. KUCZMA*

**145.** Rysunek 1 przedstawia siedmiokąt, którego wszystkie boki i przekątne pokolorowano trzema kolorami tak, że żadne trzy odcinki (boki lub przekątne) tego samego koloru nie tworzą trójkąta. Dać przykład wielokąta o większej liczbie wierzchołków (im więcej, tym wyższa ocena) z bokami i przekątnymi pomalowanymi trzema kolorami, z zachowaniem powyższego warunku. Rozwiązania należy pisać w formie tabelki, jak na rysunku 2. Kolory kodujemy symbolami $B$, $G$, $R$; wierzchołki wielokąta — cyframi. W okienku na przecięciu wiersza $x$ i kolumny $y$ umieszczamy symbol koloru odcinka łączącego wierzchołki $x$ i $y$. (Tabelka z rysunku 2 opisuje siedmiokąt z rysunku 1.)

**146.** Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych $x$, $y$) równanie

$$\frac{(x+y-1)^2+x+y}{(x-y-3)^2+1}+\frac{(x-y-3)^2-1}{(x+y-1)^2-x-y+2}=0.$$

Zadanie **146** przysłał pan Piotr Jurczyszyn z Opola

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1986

Przypominamy treść zadań:

137. Na sferze rozmieszczono $10^6$ punktów. Dowieść, że są wśród nich takie trzy, że jeśli $x, y, z$ oznaczają odległości kątowe między tymi punktami, to liczby $\cos(10^6x)$, $\cos(10^6y)$, $\cos(10^6z)$ są jednakowego znaku ($+, -, 0$) i liczby $\sin(10^6x)$, $\sin(10^6y)$, $\sin(10^6z)$ są jednakowego znaku.

138. Dowieść, że $\sum_{k=1}^{n} [k^2/4] = [n(n+2)(2n-1)/24]$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

**137.** Oznaczmy krótko: $f(x) = \cos(10^6x)$, $g(x) = \sin(10^6x)$. Jest dziewięć (a właściwie osiem) możliwych układów znaków pary liczb $(f(x), g(x))$: $++$, $+-$, $+0$, $-+$, $--$, $-0$, $0+$, $0-$, $00$ (ostatni należy wykluczyć, bo sinus i cosinus nie mogą być jednocześnie zerami). Ponumerujmy dopuszczalne układy cyframi od 1 do 8. Każdej parze punktów sfery przyporządkujmy jedną z tych cyfr, w zależności od tego, który układ znaków przyjmują $f(x)$, $g(x)$, gdzie $x$ jest odległością kątową danych punktów. Należy udowodnić, że istnieją w rozpatrywanym zbiorze trzy punkty $a, b, c$ takie, że parom $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ została przyporządkowana ta sama cyfra.

Lemat. Przyjmijmy $n_1 = 2$, $n_k = kn_{k-1}+1$ dla $k = 2, 3, \ldots$. Ustalmy $k$; niech $J$ będzie zbiorem $k$-elementowym i niech $M$ będzie dowolnym zbiorem mającym więcej niż $n_k$ elementów. Oznaczmy przez $X$ zbiór wszystkich (nieuporządkowanych) par różnych elementów zbioru $M$. Przypuśćmy, że dana jest funkcja $\varphi: X \to J$. Wówczas istnieją elementy $a, b, c \in M$ takie, że parom $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ funkcja $\varphi$ przyporządkowuje ten sam element zbioru $J$.

Z lematu natychmiast wynika teza zadania, wystarczy przyjąć $k = 8$, $J = \{1, \ldots, 8\}$. $M$ = dany zbiór punktów sfery; założenia lematu są spełnione, bo $n_8 = 109601 < 10^6$. Pozostaje udowodnić lemat.

Dowód lematu. Dla $k = 1$ teza jest oczywista. Ustalmy $k > 1$ i załóżmy prawdziwość tezy lematu dla $k-1$. Niech $J$, $M$, $\varphi$ spełniają założenia lematu. Wybierzmy dowolny element $m_0 \in M$ i weźmy pod uwagę wszystkie pary $\{m, m_0\}$, $m \in M$, $m \neq m_0$. Par tych jest tyle, ile elementów w zbiorze $M \setminus \{m_0\}$, czyli co najmniej $n_k$. Funkcja $\varphi$ przyjmuje na tych parach $k$ wartości, a ponieważ $n_k > kn_{k-1}$, więc co najmniej jedna z tych wartości, powiedzmy $j_0$, jest przyjmowana więcej, niż $n_{k-1}$ razy. Niech $M' = \{m \in M: \varphi(\{m, m_0\}) = j_0\}$. Jeśli są w zbiorze $M'$ dwa elementy $m_1$ i $m_2$ takie, że $\varphi(\{m_1, m_2\}) = j_0$, to trójka $m_0, m_1, m_2$ spełnia warunek z tezy lematu. Jeśli w zbiorze $M'$ nie ma takich dwóch elementów, znaczy to, że funkcja $\varphi$ przyjmuje na parach elementów zbioru $M'$ wartości ze zbioru $J' = J - \{j_0\}$. Zbiór $J'$ ma $k-1$ elementów, a zbiór $M'$ ma więcej, niż $n_{k-1}$ elementów. W myśl założenia indukcyjnego jest w zbiorze $M'$ trójka elementów spełniająca żądany warunek. Stąd prawdziwość tezy lematu dla danego $k$ i — przez indukcję — dla wszystkich $k \geqslant 2$.

Uwaga. Zadanie ma charakter czysto kombinatoryczny, cała treść geometryczna jest nieistotna. Dane funkcje $f$ i $g$ można zastąpić dowolnymi innymi funkcjami. Jeśli nawet nie da się wykluczyć możliwości $f(x) = 0 = g(x)$ (a więc będzie dziewięć układów par znaków), to i tak rozumowanie pozostanie w mocy, bo $n_9 = 986410$.

**138.** Oznaczmy lewą i prawą stronę dowodzonej równości przez $L_n$ i $P_n$, a wyrażenie w nawiasach kwadratowych po prawej stronie — przez $R_n$. Zatem $P_n = [R_n]$. Przyjmijmy dodatkowo $L_0 = 0$. Dla $n = 2m$ mamy

$$R_{2m} = \frac{1}{24}(2m)(2m+2)(4m-1) = \frac{1}{2}m^2(m+1)+\frac{1}{6}m(m+1)(m-1).$$

Jest to liczba całkowita, a więc $P_{2m} = R_{2m}$. Łatwo sprawdzamy, że

$$P_{2m+2}-P_{2m} = R_{2m+2}-R_{2m} = 2m^2+3m+1 = L_{2m+2}-L_{2m},$$

a ponieważ $L_0 = P_0 = 0$, zatem przez indukcję $L_{2m} = P_{2m}$ dla wszystkich $m$. Mamy ponadto

$$P_{2m+1}-P_{2m} = [R_{2m+1}]-R_{2m} = [R_{2m+1}-R_{2m}] = m^2+m = L_{2m+1}-L_{2m}.$$

Stąd $L_n = P_n$ dla wszystkich $n$.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 133 /WT=3,23/ i 134 /WT=2,28/ z numeru 8/1986

| | | |
|---|---|---|
| Zbigniew Koza | - Jelenia G. | 45,08pkt |
| Tomasz Rawlik | - Gliwice | 44,06pkt |
| Marek Prauza | - Poraj | 43,58pkt |
| Jerzy Mikuta | - Zielona G. | 42,78pkt |
| Henryk Mikołajczak | - Wałbrzych | 40,63pkt |
| Zbigniew Zaus | - Kraków | 36,93pkt |

Pan Koza kończy drugie, a pan Rawlik - trzecie okrążenie.