O pewnym problemie Stanisława Mazura

Zacznijmy od pewnych oznaczeń.

Dla $r > 0$ przez Q_r będziemy oznaczać kwadrat o boku r.

Definicja. Mówimy, że w kwadracie Q_r można umieścić wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, jeżeli:

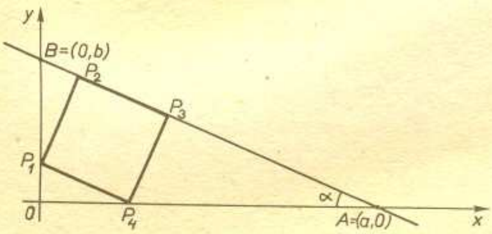
(1) $\bigcup\limits_{n=1} Q_{1/n} \subset Q_r$,

(2) kwadraty $Q_{1/n}$ i $Q_{1/m}$ mogą się stykać tylko bokami lub wierzchołkami, o ile $n \neq m$.

Na jednym ze swoich seminariów Stanisław Mazur zadał pytanie: Czy istnieje najmniejszy kwadrat Q_r, w którym mieszczą się wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$. Przedstawimy tutaj odpowiedź na to pytanie. Ze względu na rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest ona natychmiastowa.

Lemat. Niech OAB będzie trójkątem prostokątnym i niech kwadrat $P_1P_2P_3P_4$ leży w tym trójkącie. Wówczas kwadrat ten można umieścić tak, aby dwa jego boki leżały na przyprostokątnych tego trójkąta.

Dowód. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że kwadrat $P_1P_2P_3P_4$ leży tak, jak na rysunku,



oraz że bok kwadratu $P_1P_2P_3P_4$ ma długość 1. Wówczas dla $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ mamy

$$a = \cos\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + 1}{\sin\alpha},$$

$$b = \sin\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + 1}{\cos\alpha}.$$

Oznaczmy przez p prostą przechodzącą przez punkty A i B. Lemat będzie dowiedziony, jeżeli wykażemy, że punkt $(1,1)$ leży w trójkącie OAB lub inaczej mówiąc, że punkt $(1,1)$ leży po tej samej stronie prostej p co i punkt $(0,0)$. Równanie prostej p ma postać $f(x, y) = 0$, gdzie

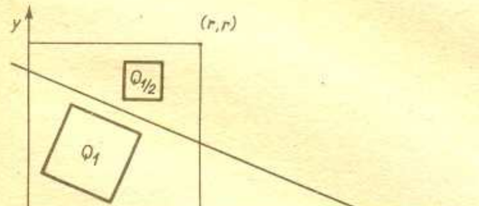
$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = \frac{x\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + 1} + \frac{y\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + 1} - 1.$$

Ale $f(0,0) = -1 < 0$. Musimy więc dowieść, że $f(1,1) \leqslant 0$. Mamy

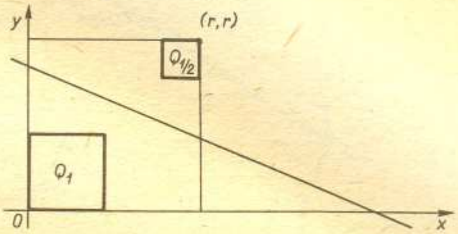
$$f(1, 1) = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + 1} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + 1} - 1.$$

Wystarczy więc wykazać, że $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sin\alpha\cos\alpha + 1$. Ale $0 \leqslant (1 - \sin\alpha)(1 - \cos\alpha) = 1 - \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$. Stąd $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant 1 + \sin\alpha\cos\alpha$, a to kończy dowód lematu.

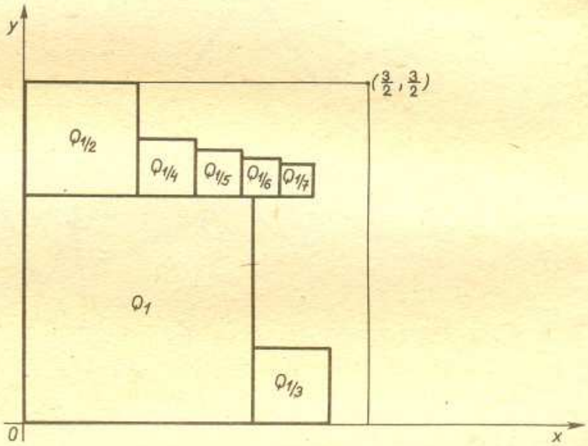
Niech teraz Q_r będzie kwadratem, w którym mieszczą się wszystkie $Q_{1/n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wówczas istnieje taka prosta p, że kwadraty Q_1 i $Q_{1/2}$ są położone względem niej tak, jak na rysunku.



Z lematu wynika natychmiast, że $r \geqslant \frac{3}{2}$, gdyż kwadraty te można umieścić w następujący sposób.



Wykażemy wreszcie, że w kwadracie $Q_{3/2}$ można umieścić wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Pokażemy to na rysunku.



Na boku kwadratu Q_1 oprócz kwadratu $Q_{1/2}$ ustawiamy w pierwszym rzędzie kwadraty $Q_{1/4}, Q_{1/5}, Q_{1/6}, Q_{1/7}$, suma długości ich boków wynosi $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 1$, a więc mieszczą się one w $Q_{3/2}$.
W drugim rzędzie ustawiamy $Q_{1/8}, Q_{1/9}, \ldots, Q_{1/15}$, suma długości ich boków wynosi $\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{15} < 1$, a więc też się mieszczą w kwadracie $Q_{3/2}$.

Postępowanie to kontynuujemy i w rezultacie na boku kwadratu $Q_{1/2}$ leżą boki kwadratów $Q_{2^{-2}}, Q_{2^{-3}}, \ldots, Q_{2^{-n}}, \ldots$, suma długości ich boków wynosi $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots =$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Wynika z tego, że wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$ można umieścić w kwadracie $Q_{3/2}$.

Odpowiedź na pytanie Stanisława Mazura jest więc następująca:

Najmniejszym kwadratem, w którym mieszczą się wszystkie kwadraty $Q_{1/n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, jest kwadrat o boku $\frac{3}{2}$.

Problemy

1) Niech $p_1 > p_2 > \ldots > p_n > \ldots$ będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_i^2 < +\infty$. Czy istnieje najmniejszy kwadrat Q_r zawierający wszystkie kwadraty Q_{p_n} $(n = 1, 2, \ldots)$?

2) Niech P_n oznacza prostokąt o bokach $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n+1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Czy istnieje najmniejszy kwadrat Q_r zawierający wszystkie prostokąty P_n $(n = 1, 2, \ldots)$?

Autorowi nie jest znana pełna odpowiedź na żaden z tych problemów i byłby bardzo wdzięczny Czytelnikom za informowanie go nawet o częściowych rezultatach.

dr Zbigniew SAWOŃ