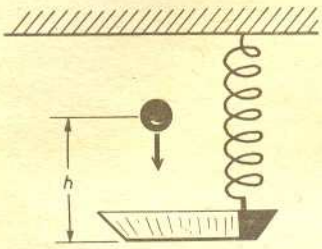
Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 475. Na okręgu o długości 1 wyróżniono punkt Q, a następnie wybrano losowo (czyli tak, że szansa wpadnięcia punktu do łuku jest proporcjonalna do długości łuku) i niezależnie dwa punkty A i B. Dzielą one okrąg na dwa łuki. Jaka jest średnia długość łuku, zawierającego punkt Q?
Rozwiązanie na str. 13

M 476. Oznaczmy przez P_n liczbę funkcji różnowartościowych $f = \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których $f(i) \neq i$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$. Pokazać, że jeśli $n \geqslant 2$, to P_n dzieli się przez $n-1$.
Rozwiązanie na str. 3

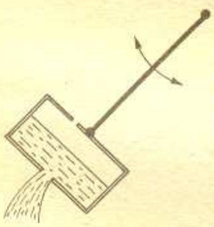
M 477. Dla jakich n współczynniki Newtona $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots n$ są wszystkie nieparzyste?
Rozwiązanie na str. 7



Rys. 1

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

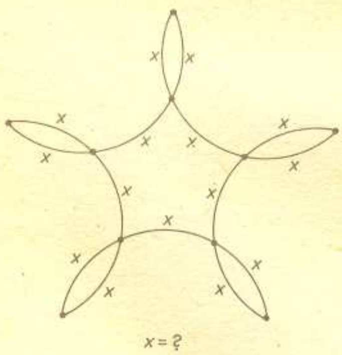
F 224. Na szalkę o masie M wagi sprężynowej (porównaj rys. 1) spada z wysokości h kulka o masie m. Przyjmując, że sprężyna wagi ma współczynnik sprężystości k, obliczyć amplitudę drgań, które nastąpią po uderzeniu kulki o dno szalki. Zderzenie kulki z dnem szalki jest doskonale niesprężyste, to znaczy, że po zderzeniu kulka pozostaje na dnie szalki. Masa kulki jest znacznie większa od masy szalki ($m \gg M$).
Rozwiązanie na str. 7


Rys. 2

F 225. Rozpatrzmy wahadło składające się z pojemnika z piaskiem sztywno zawieszonego na długim pręcie. Piasek wysypuje się jednostajnie przez otwór w dnie pojemnika. Zakładając, że amplituda drgań jest mała, określić, jak będzie się zmieniał okres wahań takiego układu.
Rozwiązanie na str. 15

Zadanie *Kwanta*

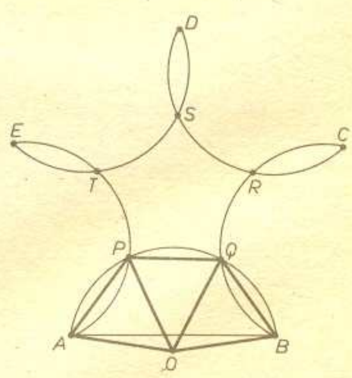
Matematyk z radzieckiego miesięcznika *Kwant*, Anatolij P. Sawin na kartce z życzeniami świątecznymi, przesłanej do naszej redakcji, nakreślił taki rysunek, jak obok. Pytanie zrozumieliśmy tak:


$x = ?$

Pięć okręgów jednostkowych o środkach w wierzchołkach pięciokąta foremnego przecina się w ten sposób, że wszystkie krótsze łuki są równej długości. Jakiej?

Kąt, pod którym ze środka okręgu O widać odcinek AP (w mierze łukowej), to, oczywiście, nasz szukany x. Zauważmy, że $ABCDE$ też jest pięciokątem foremnym (ma te same symetrie co pięciokąt ze środków) i proste AP, BQ itd. przechodzą przez wspólny środek obu pięciokątów. Zatem $\sphericalangle\, PAB = \sphericalangle\, QBA = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$.

Wobec równości łuków $APQB$ jest trapezem równoramiennym i $\sphericalangle\, AOP = \sphericalangle\, POQ = \sphericalangle\, QOB$. Ponieważ $AB \parallel PQ$, więc $\sphericalangle\, APO = \frac{1}{2} \sphericalangle\, APQ = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle\, PAB) = \frac{7\pi}{20}$. Stąd, wobec równoramienności trójkąta AOP, otrzymujemy $\sphericalangle\, AOP = \pi - 2 \sphericalangle\, APO = \frac{3\pi}{10}$. I tyle wynosi x.



Nie jest to ładne rozwiązanie. Może ktoś z Czytelników zna ładniejsze? A może inaczej należy sformułować pytanie związane z rysunkiem A. P. Sawina?

Od siebie też mamy pytanie: jak wykreślić pierwszy rysunek? I mamy też wskazówkę: nakreślić trójkąt o boku 1 i przyległych do niego kątach $\frac{9\pi}{20}$ i $\frac{7\pi}{20}$ (a to jest wykonalne cyrklem i linijką).