Zadania z matematyki nr 153, 154

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

153. Ciąg $(a(n))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest określony przez warunki: $a(2k) = a(k)$ dla $k \geqslant 1$, $a(4k+1) = 1$ dla $k \geqslant 0$, $a(4k+3) = 0$ dla $k \geqslant 0$. Czy ciąg ten jest od pewnego miejsca okresowy?

154. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 3$ można poprowadzić przez wierzchołki n-kąta foremnego n równoległych prostych (w płaszczyźnie tego wielokąta) tak, by każdy wierzchołek leżał na innej prostej i żeby odległości między sąsiednimi prostymi były takie same?

Zadanie **154** przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1987

Przypominamy treść zadań:

149. Niech b będzie średnią arytmetyczną długości wszystkich boków pewnego wielokąta wypukłego, a d — średnią arytmetyczną długości wszystkich przekątnych tego wielokąta. Dowieść, że $b < d$.

150. Dowieść, że wielomian $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $d > 0$, $c^2 + a^2d < 4\,bd$, nie ma pierwiastków rzeczywistych.

149. Oznaczmy przez n liczbę boków, a przez m liczbę przekątnych danego wielokąta W. Weźmy pod uwagę dowolny czworokąt Q, którego dwoma przeciwległymi bokami są dwa nieprzyległe boki wielokąta W; oznaczmy sumę ich długości przez $b(Q)$. Przekątne Q są też przekątnymi W; oznaczmy sumę ich długości przez $d(Q)$. Oczywiście $b(Q) < d(Q)$. Zatem $\sum_Q b(Q) < \sum_Q d(Q)$ (*); sumowanie jest rozciągnięte na wszystkie dopuszczalne czworokąty Q. Każdy bok W występuje w sumie $\sum b(Q)$ jednakową liczbę razy; oznaczmy ją przez k. Podobnie każda przekątna występuje w sumie $\sum d(Q)$ jednakową liczbę razy; oznaczmy ją przez l. A ponieważ po obu stronach nierówności (*) mamy tyle samo par odcinków, musi zachodzić proporcja $k : l = m : n$. Wobec tego

$$1 < \frac{\sum d(Q)}{\sum b(Q)} = \frac{l \cdot \text{(suma długości wszystkich przekątnych)}}{k \cdot \text{(suma długości wszystkich boków)}} = \frac{lmd}{knb} = \frac{d}{b}.$$

150. Jeśli $x \neq 0$, to

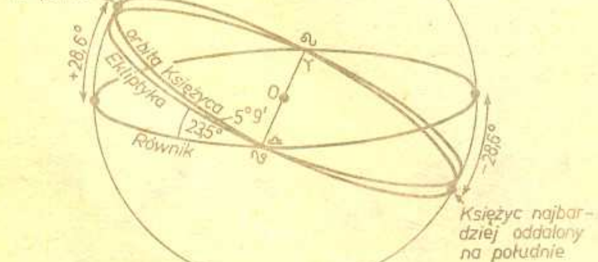
$$f(x) > x^4 + ax^3 + \frac{c^2 + a^2d}{4d}x^2 + cx + d = \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(\frac{cx}{2\sqrt{d}} + \sqrt{d}\right)^2 \geqslant 0;$$

a $f(0) = d > 0$ z założenia.

Patrz w niebo

Uważni obserwatorzy nieba być może zwrócili uwagę na fakt, że w ciągu ostatnich kilku miesięcy Księżyc czasem wznosi się szczególnie wysoko nad horyzontem, innym znów razem jego wędrówka po niebie odbywa się szczególnie nisko. Różnice te będą wyjątkowo dobrze widoczne we wrześniu, a więc tym, którzy jeszcze nie zauważyli osobliwego zachowania naszego satelity, radzimy nie zwlekać — następnym razem podobne zjawisko będzie można zaobserwować dopiero w 2006 roku.

Wyjaśnienie przyczyny występowania dużych różnic w wysokościach Księżyca podczas jego górnych kulminacji jest proste: Płaszczyzna orbity Księżyca jest nachylona pod kątem 5°9′ do płaszczyzny ekliptyki, ta zaś pod kątem 23°27′ do płaszczyzny równika niebieskiego. Gdy wszystkie trzy płaszczyzny przecinają się wzdłuż jednej prostej (tj. gdy węzły orbity Księżyca pokrywają się z punktami równonocy), orbita Księżyca może osiągać największe lub najmniejsze nachylenie w stosunku do równika, a tym samym do horyzontu. Nachylenie jest największe, gdy punkt równonocy wiosennej pokrywa się z węzłem wstępującym (rysunek), a najmniejsze, gdy pokrywa się



on z węzłem zstępującym. W sytuacjach, gdy węzły nie pokrywają się z punktami równonocy, nachylenie przyjmuje wartości pośrednie. Węzły dokonują pełnego obiegu po ekliptyce w ciągu 18,6 lat, w tym więc czasie można zaobserwować wszystkie możliwe tory Księżyca wśród gwiazd.

W 1987 roku węzeł wstępujący znajduje się właśnie w pobliżu równika niebieskiego — w gwiazdozbiorze Ryb. Wobec tego Księżyc jest najbardziej oddalony od ekliptyki wędrując na tle gwiazdozbioru Bliźniąt. Ten obszar ekliptyki jest z kolei najbardziej oddalony na północ od równika. Zsumowanie tych dwóch efektów prowadzi do sytuacji, w której maksymalna północna deklinacja Księżyca może osiągnąć aż 28°36′. Podobnie — największą deklinację południową osiąga Księżyc w gwiazdozbiorze Strzelca.

8 listopada węzeł wstępujący znajdzie się dokładnie w punkcie równonocy wiosennej. Jednak już 15 września Księżyc będzie górował na największej wysokości nad horyzontem — równej 67°. W dwa tygodnie później — 30 września, gdy przesunie się do przeciwnego punktu swej orbity, będzie górował na najmniejszej wysokości — zaledwie 9° nad horyzontem. (Wysokości górowania zależą, oczywiście, od szerokości geograficznej miejsca obserwacji — tu podane są dla Warszawy.) W latach, w których nachylenie orbity Księżyca jest przeciwne do nachylenia ekliptyki, różnice między maksymalnymi wysokościami górowania dochodzą zaledwie 37°, a tu mamy aż o 20° więcej!

Aby przekonać się, jak duże są zmiany wysokości górowania Księżyca wynikające z ruchu węzłów, najlepiej przeprowadzić obserwacje w odstępie kilku lat. 17 września Księżyc będący w ostatniej kwadrze przybliży się najbardziej do Polluksa (*β Gem*), jasnej gwiazdy z konstelacji Bliźniąt. Za kilka lat minie *β Gem* w znacznie większej odległości.

mgr Joanna UDALSKA