Manowce intuicji (I)

Prof. dr Stanisław HARTMAN

Napisany dowód matematyczny ma formę łańcucha wnioskowań. A dowód powstający dopiero w umyśle matematyka? Pragnąc rozstrzygnąć problem matematyk zwykle próbuje wnioskować w kierunku rozwiązania, które wydaje mu się bardziej prawdopodobne lub bardziej pożądane. Czasami w toku tych prób zmienia kierunek myśli — widząc, że dowód na „tak" nie „wychodzi", zaczyna szukać dowodu na „nie". Nie rozumuje jednak na ślepo. — Gdy udowodnię a, potrafię stąd wywnioskować, że b, a od b niedaleka już droga do c, o które mi właśnie chodzi. Tak mniej więcej ten proces myślenia przebiega, a więc wybiega wprzód, wyprzedza dedukcję. Nazywa się to często intuicją. Nie pretendujemy tu do ścisłego określenia tego słowa, którego sens jest niejasny i rozmyty. Gdy więc twierdzenie mniej więcej „widać", gdy odpowiada ono oczekiwaniom, mówi się, że jest intuicyjne. Takie np. jest twierdzenie, że z każdego punktu na zewnątrz koła można poprowadzić styczną do tego koła, albo że prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do każdej prostej leżącej w tej samej płaszczyźnie, co one obie. Jeśli jakieś twierdzenie jest bardzo intuicyjne, mówimy, że jest oczywiste, jak np. twierdzenie, że przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające, albo że trójkąty o bokach odpowiednio równych mają także kąty odpowiednio równe. Oczywiste (chyba) jest twierdzenie, że jeśli k, m i n są liczbami naturalnymi, a k nie ma wspólnego dzielnika ani z m, ani z n, to nie ma wspólnego dzielnika z iloczynem mn. Dowody takich twierdzeń mogą się wydawać zbędne. Po co dowodzić, kiedy i tak widać? Ale dowód czasem sięga głębiej i pozwala zobaczyć więcej. Na przykład dowód przytoczonego tu twierdzenia o dzielnikach (z którego, dodajmy, łatwo wywnioskować, że każda liczba naturalna da się rozłożyć na czynniki pierwsze w jeden tylko sposób) wiąże jego treść z rozwiązalnością w liczbach całkowitych x, y równań postaci $ax+by=c$, gdzie a, b i c są całkowite. Sceptyk powie może, że to jest komplikowanie prostych rzeczy. On i tak „widzi". Nie kłóćmy się z nim, na razie przynajmniej. Pokażmy mu lepiej takie twierdzenia, których „nie widać". Mało kto na przykład od razu „zobaczy", że dwusieczne kątów w trójkącie przecinają się w jednym punkcie i tak samo symetralne boków. Niemal każdy słysząc o tym po raz pierwszy zapyta „dlaczego?". Łatwo go będzie przekonać prostym dowodem, a trudniej już o tym, że także wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie. Jeszcze mniej intuicyjne jest twierdzenie, że jeśli liczba naturalna a nie dzieli się przez liczbę pierwszą p, to liczba a^{p-1} daje przy dzieleniu przez p resztę 1 (może ktoś spróbuje to udowodnić?). Dla ogromnej większości ludzi to twierdzenie będzie zupełnie nieoczekiwane. Mówimy ostrożnie „dla ogromnej większości", bo intuicja zależy od posiadanej wiedzy i wprawy i co dla jednego jest nieintuicyjne, dla drugiego może być niemal oczywiste.

Nie jest jednak moim celem tutaj przekonywać Czytelników *Delty*, że sama intuicja w matematyce nie wystarcza, że jest zbyt słabym narzędziem. Oni zapewne o tym wiedzą. Chciałbym im raczej pokazać, jak intuicja potrafi zwodzić, prowadzić na manowce.

Uczeń jest przyzwyczajony uważać linię prostą za zbiór punktów. Nie zawsze tak trzeba myśleć o prostej, zwłaszcza w geometrii, ale tutaj to ujęcie „mnogościowe" jest dla mnie wygodne. Uważajmy prostą za zbiór punktów, wybierzmy na niej punkt zerowy i jednostkę długości, a wtedy punkty prostej będziemy mogli utożsamiać z liczbami i mówić np. o punktach wymiernych lub całkowitych zamiast o liczbach wymiernych lub całkowitych. Punkty wymierne leżą na prostej gęsto. Znaczy to, że w każdym odcinku (dobrze jest myśleć tu o małych odcinkach) leży jakiś punkt wymierny, czyli liczba postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q to liczby całkowite, a $q > 0$. To niemal oczywiste. Gdy I jest dowolnym odcinkiem, a $|I|$ oznacza jego długość, wybierzmy takie q, żeby było $\frac{1}{q} < |I|$. Odkładajmy kolejno odcinek długości $\frac{1}{q}$ od 0 w prawo i w lewo. Powstanie na prostej zbiór

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

NOWA WARTOŚĆ STAŁEJ RYDBERGA

Dokładność pomiarów fizycznych stale rośnie. Ostatnio grupa fizyków amerykańskich z Yale University (New Haven, Connecticut) oraz National Bureau of Standards (Gaithesburg, Maryland) przeprowadziła bardzo precyzyjne pomiary linii β serii Balmera w wodorze oraz deuterze, co umożliwiło wyznaczenie nowej, dokładniejszej wartości stałej Rydberga. Przypomnijmy, że stała Rydberga

$$R_\infty = m_0 e^4 / 8 h^3 c \epsilon_0^2$$

wiąże się z energią jonizacji atomu wodoru w sposób następujący:

$$E_H = R_\infty hc\,[M/(m_0+M)] \approx 13{,}6 \text{ eV},$$

gdzie M jest masą jądra atomowego. Jądro wodoru to, oczywiście, proton, a deuteru – proton i neutron. W konsekwencji:

$$E_H \approx 0{,}99946\, R_\infty hc \approx 13{,}598 \text{ eV},$$
$$E_D \approx 0{,}99973\, R_\infty hc \approx 13{,}602 \text{ eV}$$

Energie poszczególnych stanów wzbudzonych otrzymuje się dzieląc E_H lub E_D przez n^2, (gdzie $n=2,3,4,\ldots$). W omawianym eksperymencie mierzona była zielona linia β serii Balmera, odpowiadająca przejściu ze stanu $n=2$ do stanu $n=4$. Długość fali świetlnej Λ_β odpowiadająca tej linii jest równa w przybliżeniu $16/3R_\infty \approx 0{,}49$ μm co odpowiada energii około 2,5 eV. Ze względu na istnienie oddziaływania spin-orbita linia ta ulega rozszczepieniu na szereg składowych, odległych od siebie o setne części meV. Zasadnicze pomiary wykonano więc dla dwóch najsilniejszych składowych linii β w wodorze i deuterze oznaczanych jako $2^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$ oraz $2^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{3/2}$. Z położenia każdej z tych składowych wyznaczono stałą Rydberga. Ostateczny rezultat będący średnią wszystkich uzyskanych w ten sposób wyników wynosi:
$R_\infty = 109\ 737{,}315\ 73 \pm 0{,}00003 \text{ cm}^{-1}$, co oznacza błąd względny mniejszy niż 3×10^{-10}. Odpowiada to zważeniu człowieka z dokładnością do 0,02 mg lub pomiarowi długości równika z dokładnością do około 1 cm. Jest to najprecyzyjniej wyznaczona stała fizyczna i niewątpliwie jeden z najdokładniejszych pomiarów w historii ludzkości. Warto nadmienić, że przed rokiem grupa ze Stanford University (Palo Alto, Kalifornia) opublikowała nieco inną wartość stałej Rydberga ($R_\infty = 109\ 737{,}314\ 92 \pm 0{,}00022 \text{ cm}^{-1}$). Niezgodność tego rezultatu z omawianą powyżej pracą zmusiła grupę stanfordzką do powtórzenia eksperymentu. Otrzymana ostatecznie wartość $R_\infty = 109\ 737{,}315\ 71 \pm 0{,}00007 \text{ cm}^{-1}$ jest zgodna z wynikami pomiarów przeprowadzonych na wschodnim wybrzeżu.

punktów odległych każdy o $\frac{1}{q}$ od dwóch sąsiednich. Co najmniej jeden punkt tego zbioru leży w odcinku I, a jest postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest liczbą całkowitą, więc jest wymierny.

Ograniczymy się teraz do odcinka $[0, 1]$. I w nim liczby wymierne tworzą zbiór gęsty. Oznaczmy go przez W. „Otoczmy" każdą liczbę ze zbioru W odcinkiem, to znaczy utwórzmy dla każdej liczby $\frac{p}{q}$ odcinek $\left[\frac{p}{q}-\delta, \frac{p}{q}+\delta\right]$, gdzie δ jest liczbą dodatnią. Nie zakładamy, że jest to za każdym razem ta sama liczba dodatnia. Każda liczba z W staje się w ten sposób środkiem jakiegoś wybranego odcinka. O długościach tych odcinków nic nie zakładamy. Czy te odcinki łącznie zawsze muszą pokryć cały odcinek $[0, 1]$? Innymi słowami, czy każdy punkt w $[0, 1]$ zawsze leży w którymś z wybranych odcinków, jakkolwiek je wybraliśmy? Pamiętajmy, że w dowolnej bliskości każdego punktu leży jakiś punkt wymierny i postarajmy się odpowiedzieć na zadane pytanie. Co podpowiada intuicja? Myślę, że prawie każdemu podpowiada „tak", a więc kłamie.

Liczby z W nie dadzą się ponumerować w porządku wzrastania, ale można to zrobić inaczej. Napiszmy: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \ldots$. Widać, jak ten ciąg jest zbudowany i że wystąpi w nim każda liczba wymierna między 0 a 1, i to nawet nie raz, lecz nieskończenie wiele razy, np. $\frac{1}{2}$ wystąpi także jako $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ itd. Poskreślajmy teraz te liczby, które już raz wystąpiły, to znaczy zostawmy tylko ułamki nieskracalne. Otrzymamy ciąg $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \frac{1}{2}$, $w_4 = \frac{1}{3}$, $w_5 = \frac{2}{3}$, $w_6 = \frac{1}{4}$, $w_7 = \frac{3}{4}$, $w_8 = \frac{1}{5}, \ldots, w_{12} = \frac{1}{6}$, $w_{13} = \frac{5}{6}, \ldots$ Jest to dokładnie ciąg wszystkich różnych liczb ze zbioru W, które w ten sposób zostały ponumerowane. Np. siódmą z kolei liczbą wymierną w $[0, 1]$ jest $\frac{3}{4}$. Otoczmy teraz każdą liczbę w_n odcinkiem $I_n = \left[w_n - \frac{1}{2^{n+2}}, w_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right]$. Jego długość wynosi $\frac{1}{2^{n+1}}$. Odcinki te będą

Rozwiązanie zadania F 240. Całkowita energia elektronu w odległości r od jądra jest określona równaniem

$$W = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

gdzie m_e, e i p są odpowiednio masą, ładunkiem i pędem elektronu. Minimalną energię otrzymamy dla najmniejszych wartości p i r. Jednakże zgodnie z zasadą nieoznaczoności mamy $\Delta p \cdot \Delta r \geqslant h/2\pi$. Zauważmy, że w zapisie tego wyrażenia prędkość występująca w pędzie jest prędkością w kierunku r (radialną). Średnie wartości promienia $\langle r\rangle$ i pędu $\langle p\rangle$ nie mogą być mniejsze od nieoznaczoności położenia Δr i pędu Δp. Stąd dla średnich wartości r i p mamy

$$\langle r\rangle \cdot \langle p\rangle \geqslant h/2\pi.$$

Średnia wartość energii całkowitej W jest równa

$$\langle W\rangle = \frac{(h/2\pi)^2}{2m_e\langle r^2\rangle} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\langle r\rangle}.$$

Wielkość ta jest najmniejsza, gdy

$$\langle r\rangle = \frac{4\pi\varepsilon_0(h/2\pi)^2}{m_e e^2}.$$

Jest to wartość promienia pierwszej orbity w modelu Bohra. Minimalna wartość energii odpowiadająca energii stanu podstawowego jest więc równa

$$W_0 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2(h/2\pi)^2}.$$

Patrz w niebo

Po zimowej obfitości jasnych, przyciągających wzrok gwiazd, niebo wiosenne prezentuje się raczej skromnie. Jednak właśnie teraz nadarza się sposobność do zwrócenia uwagi na trzy największe (pod względem zajmowanej powierzchni) gwiazdozbiory. Są nimi (wg malejącej powierzchni) Hydra (*Hydra*), Panna (*Virgo*) i Wielka Niedźwiedzica (*Ursa Major*).

Hydra jest konstelacją bardzo wyciągniętą w rektascensji — obejmuje swymi splotami ponad 1/4 obwodu nieba. Jej „głowa", składająca się z czterech słabych gwiazdek, wschodzi o tej porze roku jeszcze w dzień — około południa, a koniec „ogona" pojawia się nad horyzontem dopiero po zapadnięciu całkowitego zmroku. Szczęśliwie „głowa" nie zdąża jeszcze zajść w tym czasie, a więc przez parę godzin można Hydrę podziwiać w całości. Ponad półtora raza dłuższy w rektascensji jest, widoczny u nas o każdej porze roku, Smok (*Draco*). Jednak, jako gwiazdozbiór leżący w pobliżu bieguna, jest na niebie znacznie bardziej zwinięty, w związku z czym ma powierzchnię prawie o 20% mniejszą od powierzchni Hydry — zajmuje ósmą pozycję w grupie największych gwiazdozbiorów.

Konstelacja Panny — gwiazdozbiór drugi pod względem zajmowanej powierzchni — góruje o tej porze roku około północy. Przypomnijmy, że gdy Słońce znajduje się w znaku Barana (kwiecień), jest ono — wskutek przesunięcia precesyjnego — w gwiazdozbiorze Ryb. Panna, jako leżąca po przeciwnej, w stosunku do Ryb, stronie Zodiaku, góruje w momencie dołowania Słońca, czyli o północy (o regularności pojawiania się gwiazdozbiorów zodiakalnych pisaliśmy w *Delcie* 2/1987).

Jeśli chodzi o Wielką Niedźwiedzicę, to jej obecność na niebie o żadnej porze roku nie budzi zdziwienia. Jest powszechnie znanym gwiazdozbiorem okołobiegunowym, który w naszych szerokościach geograficznych nigdy nie wschodzi ani nie zachodzi. Tak się jednak składa, że właśnie w podobnym czasie, co Hydra i Panna, Wielka Niedźwiedzica zajmuje najwyższe na niebie, a więc najdogodniejsze do obserwacji, położenie. Fakt, że Wielka Niedźwiedzica jest

Osoby, które w celu odnalezienia Hydry zechcą skorzystać z mapy nieba wydrukowanej na okładkach rocznika *Delty* z 1985 roku lub obrotowej mapy nieba wydanej przez PTMA, mogą napotkać poważne trudności. Czyżby nie zaznaczono tam największego gwiazdozbioru? Rzecz jasna, jest to niemożliwe. Na mapach tych Hydra została nazwana Wężem Wodnym. Rzeczywiście czasem tak się ją nazywa, choć jest to dość niebezpieczne, gdyż może prowadzić do nieporozumień. Na południowej półkuli nieba leży gwiazdozbiór o nazwie Wąż Morski (*Hydrus*) i z Wężem Wodnym łatwo go pomylić.

w rozmaity sposób zachodzić na siebie. Czy łącznie pokryją zbiór [0, 1]? Gdyby tak było, to ułożone jeden za drugim, tak, żeby tylko końcami się stykały, musiałyby utworzyć odcinek długości co najmniej 1. Tymczasem suma ich długości, czyli suma ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $\frac{1}{4}$ i ilorazie $\frac{1}{2}$ wynosi zaledwie $\frac{1}{2}$.

W tym dowodzie nie korzystaliśmy naprawdę z tego, że liczby w_n są wymierne. Istotne było, że dadzą się ponumerować, czyli ustawić w ciąg. Jeśli elementy zbioru można ponumerować, zbiór nazywa się przeliczalny. Udowodniliśmy zatem, że jeśli zbiór w [0,1], choćby gęsty, jest przeliczalny, to jego punkty można otoczyć odcinkami w ten sposób, żeby nie cały odcinek [0,1] został pokryty. Co więcej, można sobie długości tych odcinków dowolnie z góry zadać, na przykład tak, żeby ich suma była mniejsza od dowolnie zadanej liczby $\varepsilon > 0$.

Dla zbioru W mogliśmy zamiast I_n wziąć równie dobrze odcinki $J_n = \left[w_n - \frac{1}{2^{n+k}}, w_n + \frac{1}{2^{n+k}}\right]$, gdzie k jest dowolnie duże, a niekoniecznie równe 2. Przy odpowiednio dużym k będzie $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < \varepsilon$. Zbiór na prostej, który można pokryć odcinkami o dowolnie małej sumie długości, nazywa się zbiorem miary 0, a więc każdy zbiór przeliczalny jest miary 0. Zbiór wszystkich liczb wymiernych także jest przeliczalny, a więc miary 0. Jak go ustawić w ciąg? To trochę trudniejsze niż dla liczb wymiernych w odcinku, ale można się o to pokusić. A czy w ogóle istnieją zbiory, których nie można ustawić w ciąg?

Oczywiście nie jest zbiorem miary 0 żaden odcinek, bo go w żaden sposób nie pokryjemy przedziałami o sumie długości mniejszej niż jego własna długość. Stąd wniosek, że zbiór liczb z odcinka [0,1], a tym bardziej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny — jego elementów nie można ponumerować, nie starczy numerów. Inaczej mówiąc — liczb rzeczywistych już w odcinku [0,1] jest więcej niż liczb naturalnych. Zatem nieskończoność nieskończoności nierówna — jedna może być większa od drugiej. Co na to nasza intuicja? To odkrycie sprzed 113 lat, jedno z największych w historii matematyki, zawdzięczamy matematykowi niemieckiemu Georgowi Cantorowi.

Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych wynikła nam stąd, że nie jest to zbiór miary 0. A czy każdy zbiór miary 0 musi być przeliczalny? Odpowiemy na to pytanie w drugiej części tego artykułu.

Rozwiązanie zadania M500. Aby zrozumieć, co właściwie robi ten nieco zagmatwany algorytm, należy obliczyć kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n). Po otrzymaniu samych zer i jedynek można zacząć coś podejrzewać. Wynik, zapisany jako ułamek dwójkowy: 1,0110101 ... (co daje ułamek dziesiętny 1,414 ...), sprawi, że podejrzenia staną się bardziej konkretne. I rzeczywiście — dostajemy rozwinięcie dwójkowe $\sqrt{2}$.
Dla dowodu zauważmy, że $4(2-a_0^2) = r_1$, $4(2\cdot 4-(2^1a_0+2^0a_1)^2) = 4(2\cdot 4-4a_0^2-s_1) = 4(r_1-s_1) = r_2$ i ogólnie, $4(2\cdot 4^n-(2^na_0+ \ldots +2^0a_n)^2) = r_{n+1}$.
Stąd $p_n^2 = (a_0+a_12^{-1}+ \ldots +a_n2^{-n})^2 \leqslant 2$, ponadto $(p_n+2^{-n})^2 > 2$.
Zatem $p_n \to \sqrt{2}$. Zauważmy jeszcze, że $a_n \in \{0,1\}$. Gdyby bowiem $a_n \geqslant 2$, to $(a_0+a_12^{-1}+ \ldots +2\cdot 2^{-n}) \leqslant 2$, więc $(a_0+a_12^{-1}+ \ldots +(a_{n-1}+1)2^{-(n-1)})^2 \leqslant 2$ — sprzeczność, bo $(p_{n-1}+2^{-(n-1)})^2 > 2$.
Ostatecznie, ciąg (a_n) nie jest okresowy, bo $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

---

trzecim co do wielkości gwiazdozbiorem, może budzić zdziwienie jedynie wśród osób, które utożsamiają ją z Wielkim Wozem. Sam Wielki Wóz nie jest aż tak duży, stanowi on tylko fragment Wielkiej Niedźwiedzicy — jej „tułów" i „ogon". „Przednie łapy" i „łeb" Niedźwiedzicy (utworzone ze znacznie słabszych gwiazd) leżą aż nad „głową" Hydry. Wielka Niedźwiedzica jest prawie tak samo długa jak Hydra, tyle że podobnie jak Smok leży w pobliżu bieguna, gdzie koła rektascensji zagęszczają się.

Inne, charakterystyczne zgrupowanie rozległych gwiazdozbiorów można zaobserwować w wieczory jesienne, kiedy to górują Wodnik (*Aquarius*), Pegaz (*Pegasus*), Erydan (*Eridanus*) i Wieloryb (*Cetus*). W ten sposób niemal wyczerpaliśmy listę dziesięciu największych gwiazdozbiorów obu półkul nieba (patrz tabelka). Z pozostałych dwóch Herkules (*Hercules*) jest najlepiej widoczny w wieczory letnie, Centaura (*Centaurus*) zaś praktycznie nie widać w naszych szerokościach geograficznych — jego niewielkie fragmenty można dostrzec tuż nad horyzontem pod „ogonem" Hydry.

Zwróćmy uwagę, że największe gwiazdozbiory wcale nie są najbardziej znane (oczywiście z wyjątkiem Wielkiej Niedźwiedzicy), w tym sensie, że nie jest łatwo wskazać ich kształty na niebie. Zawierają stosunkowo niewiele jasnych gwiazd i dlatego prezentują się o wiele mniej okazale niż np. tak znane konstelacje nieba zimowego jak Orion (*Orion*) czy Bliźnięta (*Gemini*).

Dawniej największym gwiazdozbiorem był Okręt Argonautów leżący na południowej półkuli nieba. Zgodnie z obowiązującymi do dziś postanowieniami Międzynarodowej Unii Astronomicznej Okręt rozpadł się na mniejsze fragmenty — Kil (*Carina*), Rufę (*Puppis*) i Żagiel (*Vela*) — i jako całość przestał istnieć. Tym samym Hydra stała się największą konstelacją i ogólnie można powiedzieć, że znaczna większość gwiazdozbiorów zajmujących największe powierzchnie leży na północnej półkuli nieba. Czy dotyczy to również gwiazdozbiorów najmniejszych? Napiszemy o tym innym razem.

Dziesięć największych gwiazdozbiorów

Nazwa łacińska	Powierzchnia (w stopniach kwadratowych)
Hydra	1303
Virgo	1294
Ursa Major	1280
Cetus	1231
Hercules	1225
Eridanus	1138
Pegasus	1121
Draco	1083
Centaurus	1060
Aquarius	980

mgr Joanna UDALSKA