

W artykule omawiamy tzw. symetrie kinematyczne, natomiast wspomniany w przykładzie fakt, że podczas ruchu w polu potencjalnym typu

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r}$$

zachowany jest wektor  $\mathbf{v} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{r}}{r}$ , związany z innym typem symetrii, tzw. symetriami dynamicznymi.



### Rozwiązanie zadania F 259.

Z symetrii przedstawionego układu wnioskujemy, że  $I_{BD} = 0$ ,  $I_{CD} = I_{BC} = I_0/2$ , gdzie  $I_0$  jest natężeniem prądu wpływającego do obwodu. Możemy to stwierdzić w następujący sposób. Punkty doprowadzenia prądu - C i G są wyróżnione w tym układzie. A zatem jedyną symetrią układu, tzn. taką transformacją, po której dokonaniu własności fizyczne układu (wszystkie lub ich część) pozostają bez zmiany, będzie odbicie względem osi przechodzącej przez punkty C i G. Rozpatrując nasz obwód przed i po dokonaniu takiej transformacji widzimy, że obraz punktu B pokrywa się z punktem D. Ponieważ własności fizyczne przed i po dokonaniu transformacji mają być takie same, to potencjały punktów B i G są jednakowe. Oznacza to, że  $I_{BD} = 0$ . Takie same też muszą być natężenia  $I_{CD} = I_{BC} = I_0/2$ . Dla prądów płynących w odcinkach AB i BE możemy napisać:

$$I_{AB}/I_{BE} = R/2R, \quad I_{AB} + I_{BE} = I_0/2,$$

$$I_{AB} = I_0/6, \quad I_{BE} = I_0/3.$$

Ponieważ ilość wydzielonego ciepła wynosi  $Q = RI^2$ , to stosunki wydzielonego ciepła wynoszą:

$$Q_{BD} : Q_{BC} : Q_{CD} : Q_{AB} : Q_{BE} = 0 : 9 : 9 : 1 : 4.$$

Jeśli opór odcinka BD jest równy zeru, a opór odcinka CD - 2R, to odpowiednio stosunki prądów wyniosą:

$$I_{BC} : I_{CD} = 2R : R, \quad I_{BC} + I_{CD} = I_0$$

$$I_{BC} = 2I_0/3, \quad I_{CD} = I_0/3.$$

$$I_{AB} : I_{BE} = R : 2R, \quad I_{AB} + I_{BE} = I_0/2,$$

$$I_{AB} = I_0/6, \quad I_{BE} = I_0/3.$$

Otrzymujemy na tej podstawie

$$Q_{BD} : Q_{BC} : Q_{CD} : Q_{AB} : Q_{BE} = 0 : 16 : 8 : 1 : 4.$$

Znajomość praw zachowania ogromnie upraszcza znajdowanie odpowiedzi na wiele pytań dotyczących ruchu układu. Pozwala ona uniknąć rozwiązywania równań ruchu i np. do znalezienia prędkości końcowej ciała spadającego swobodnie z wysokości  $h$  nie musimy nawet wiedzieć, że porusza się ono ruchem jednostajnie przyspieszonym, jeżeli tylko wiemy, jak zależy energia potencjalna ciała od wysokości (i oczywiście, że suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała). Co więcej, ponieważ do sformułowania praw zachowania potrzebne są jedynie dość ogólne cechy układu, więc często pozwalają one odpowiedzieć na wiele pytań również w przypadkach, gdy szczegółowa postać równań ruchu nie jest nam w ogóle znana. Potrafimy na przykład znaleźć prędkości końcowe ciał po zderzeniu centralnym doskonale sprężystym jedynie na podstawie prawa zachowania pędu i energii kinetycznej, a w przypadku ruchu w polu siły  $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$  znajomość dwóch wektorów stałych w czasie ruchu (co łatwo sprawdzić):

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$  i  $\mathbf{C} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{r}}{r}$  ( $\mathbf{v}$  - prędkość ciała,  $m$  - jego masa), pozwala już wyznaczyć tor ruchu  $\mathbf{r} = \frac{|\mathbf{L}|^2}{m(k + |\mathbf{C}| \cos \Theta)}$  (kąt  $\Theta$  mierzony jest od wektora  $\mathbf{C}$ ).

Jak widać, warto zastanowić się, jakie własności układu pozwalają stwierdzić, które wielkości będą zachowywane w czasie jego ruchu (czy ogólniej - ewolucji czasowej). Prześledźmy proste przykłady znajdowania takich wielkości. Odpowiednie prawo powinno mieć postać: pochodna względem czasu pewnej wielkości równa się zeru, a do jego wyprowadzenia powinniśmy posłużyć się równaniami ruchu. Załóżmy więc, że badamy ruch cząstki o masie  $m$ , w którym działającą siłę można otrzymać jako gradient pewnej funkcji (energii potencjalnej)  $U(x_1, x_2, x_3, t)$ , to znaczy

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

Równania ruchu mają więc postać:

$$m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

Pomnóżmy te równania przez  $\mathbf{v}_i$ , wtedy mamy:

$$m\mathbf{v}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\mathbf{v}_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

Lewą stronę możemy zastąpić wyrażeniem  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 \right)$ . Zsumujmy teraz równania:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \right] = - \left[ \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right].$$

Jeśli  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ , czyli  $U$  nie zależy jawnie od czasu, to prawa strona ostatniej równości jest po prostu szybkością zmian  $U$  w czasie ruchu cząstki - lub inaczej

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + U \right] = 0$$

podczas ruchu. Otrzymaliśmy zasadę zachowania energii. I drugi przykład: badamy ruch cząstek o masach  $m_i$ ; założmy, że energia potencjalna związana z oddziaływaniem cząstki  $i$  na cząstkę  $j$  zależy tylko od różnic ich współrzędnych

$$U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

wówczas siła  $\mathbf{F}_{ij}$ , z jaką cząstka  $j$  działa na cząstkę  $i$ , dana jest przez

$$(\mathbf{F}_{ij})_x = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (\mathbf{F}_{ij})_y = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad (\mathbf{F}_{ij})_z = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

a więc  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , jak być powinno. Odpowiednie równania ruchu mają postać (zakładamy, że nie działają żadne inne siły)

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_j \mathbf{F}_{ij}.$$

Po ich zsumowaniu stronami otrzymujemy  $\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} = 0$ .

Otrzymaliśmy zasadę zachowania całkowitego pędu.

Niezależność energii potencjalnej od czasu oznacza, że niezależnie od chwili rozpoczęcia ruchu jego przebieg będzie taki sam, o ile rozpocznie się z tego samego miejsca i z tą samą prędkością początkową. Natomiast założenie, że siły zależą jedynie od różnic



## LODOWY TRANZYSTOR

Kryształy lodu są bardzo interesującymi obiektami badań dla fizyki ciała stałego. Są to słabo związane kryształy molekularne, w których cząsteczki  $H_2O$  tworzące kryształ mają dużą swobodę i na przykład stale kręcą się z częstością  $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Przerwa energetyczna między pasmami walencyjnym i przewodnictwa wynosi w lodzie około 10,9 eV (dziesięć razy więcej niż w krzemie), co oznacza praktycznie całkowity brak przewodnictwa elektronowego.

Natomiast energia aktywacji defektów w kryształach lodu jest stosunkowo niewielka i wynosi poniżej 1 eV. Dzięki temu uważa się, że to defekty struktury krystalicznej są odpowiedzialne za przewodnictwo elektryczne lodu. W ostatnich latach badania własności fizycznych lodu prowadzone w Instytucie Fizyki Ciała Stałego Akademii Nauk ZSRR w Czernogolowce (dystrykt moskiewski) w sposób istotny rozszerzyły naszą wiedzę o tym materiale. Stwierdzono, że prąd elektryczny płynący przez lód umieszczony pomiędzy metalowymi elektrodami pozostaje nie zmieniony nawet przez wiele dni, natomiast bardzo łatwo go można zmieniać za pomocą oświetlenia. Zaproponowany model przewiduje, że nośnikami prądu w lodzie są jony  $H_3O^+$  oraz  $OH^-$  powstające poprzez przeniesienie jednego z protonów w okolicę sąsiedniego atomu tlenu. Ciekawy jest fakt, iż ładunki tych jonów nie są bynajmniej całkowitymi wielokrotnościami ładunku elementarnego, lecz ułamkami ( $\pm 0,62$ ). Po zetknięciu się z elektrodami i wymianie z nimi elektronu powstają z kolei jony  $H_3O^-$  oraz  $OH^+$ , które zaczynają ruch w kierunku przeciwnym. Ich ładunki są również ułamkami ładunku elementarnego ( $\pm 0,38$ ). Ruchliwość tych nośników prądu jest bardzo mała  $\mu = 10^{-2} - 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$  i jej pomiar metodą tradycyjną (tzw. efektu Halla) nie jest możliwy. W związku z tym fizycy radzieccy wspólnie ze współpracownikami z uniwersytetów w Birmingham (Anglia) i Hokkaido (Japonia) zaproponowali nową metodę pomiarową. Mianowicie, skonstruowano tranzystor polowy, którego integralną częścią była płytka lodu. Na utlenionej powierzchni płytki krzemowej napyłono zostały złote elektrody, na tym umieszczona została płytka lodu, którą z drugiej strony przykrywała elektroda ze stopu miedzi i srebra. Wszystkie pomiary przeprowadzano w temperaturze  $-33^\circ \text{C}$ . Badania przeprowadzone z tym lodowym tranzystorem pozwoliły na potwierdzenie przedstawionego wyżej modelu oraz pomiar koncentracji i ruchliwości nośników prądu w kryształach lodu.

współrzędnych, prowadzi do wniosku, że przebieg ruchu nie zmieni się, jeśli w chwili początkowej układ jako całość zostanie przesunięty w inny obszar przestrzeni (o ile zachowamy względne położenia i prędkości). W naszych przykładach założenie niezmienniczości układu względem przesunięcia w czasie doprowadziło do prawa zachowania energii, a niezmienniczości względem przesunięć przestrzennych – do prawa zachowania pędu. Czy istnieje związek między prawami zachowania i istnieniem przekształceń nie zmieniających układu (jego symetrii)? Tak, taki związek istnieje, należy jednak dokładnie określić, jakie cechy układu mają pozostawać nie zmienione. Gdybyśmy bowiem w drugim z naszych przykładów założyli, że niezależnie od położenia mas na każdą z nich działa taka sama siła zewnętrzna, to, oczywiście, nasz układ nadal „wyglądałby” tak samo po przesunięciu w przestrzeni, jednak składowa pędu wzdłuż kierunku działania zewnętrznej siły nie byłaby już stałą ruchu (układ jako całość poruszałby się w tym kierunku ze stałym przyspieszeniem!).

Ogólne twierdzenie wiążące symetrie układu i prawa zachowania podała w 1918 r. Emmy Noether (1882 – 1935) – korzystała przy tym z faktu, że równania ruchu można otrzymać z zasady najmniejszego działania (o zasadzie najmniejszego działania pisaliśmy w *Delcie* 6/1985). Zgodnie z tą zasadą rzeczywisty ruch, od chwili  $t_1$  do  $t_2$ , układu opisywanego współrzędnymi  $q_1, \dots, q_n$  (mogą to być położenia, kąty jak w przypadku obrotu bryły sztywnej itp.) przebiega tak, że wielkość

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt}, t) dt,$$

nazywana działaniem, przyjmuje wartość minimalną. Funkcja  $\mathcal{L}$  (lagranżjan) zawiera pełną informację o układzie i w przypadku ruchu w polu sił potencjalnych ma postać

$$\mathcal{L} = T - U,$$

gdzie  $T$  jest energią kinetyczną, a  $U$  energią potencjalną układu. Możemy teraz sformułować twierdzenie Noether:

Każdej jednoparametrowej rodzinie przekształceń postaci

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, \dots, q_n, t; \alpha), \quad \tilde{t} = t(q_1, \dots, q_n, t; \alpha),$$

(gdzie:  $\tilde{q}_i(q_1, \dots, q_n, t; 0) = q_i$ ,  $\tilde{t}(q_1, \dots, q_n, t; 0) = t$ ) nie zmieniających wartości całki działania odpowiada jedna stała ruchu.

Dowód twierdzenia zawiera przepis obliczania wielkości zachowywanej. W przypadku niezmienniczości względem przesunięć w czasie ( $\tilde{t} = t + \tau$ ) wielkością tą jest energia zdefiniowana jako:

$$E = \sum_i q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}, \quad \text{gdzie } \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

(warto sprawdzić, że wielkość ta odpowiada wielkości zdefiniowanej w pierwszym z naszych przykładów), niezmienniczości względem przesunięcia odpowiada zachowanie składowej pędu równoległej do kierunku przesunięcia, a niezmienniczości względem obrotów – składowej momentu pędu wzdłuż osi obrotu.

Dotychczas zajmowaliśmy się przykładami dotyczącymi mechaniki. Twierdzenie Noether obowiązuje w każdym przypadku, gdy równania ruchu można otrzymać z zasady wariacyjnej, a więc „działa” we wszystkich niemal teoriach fizycznych. Co więcej, gdy rozszerzamy teorię, twierdzenie mówi, jaką wielkość nazwać całkowitą energią, pędem, momentem pędu itd. Jeżeli na przykład uwzględnimy fakt, że oddziaływanie cząstek naładowanych odbywa się poprzez oddziaływanie z polem elektromagnetycznym, to twierdzenie Noether pozwoli znaleźć przepis obliczania energii i pędu pola. Twierdzenie Noether jest więc jednym z najważniejszych i najwygodniejszych narzędzi fizyka teoretyka.

Poza wymienionymi wcześniej symetriami czasoprzestrzennymi rozpatruje się również symetrie „wewnętrzne”. Najprostszym przykładem jest niezmienniczość równania Schrödingera (to równanie też można otrzymać z zasady wariacyjnej) względem zmiany fazy funkcji falowej układu, czyli transformacji obrotu w płaszczyźnie zespolonej i odpowiadające jej zachowanie liczby cząstek. Podobny charakter mają prawa zachowania ładunków: elektrycznego, leptonowego, barionowego...

Problemem interesującym fizyka jest zbadanie wszystkich niezależnych praw zachowania obowiązujących w badanym układzie, a więc również wszystkich symetrii układu. Zbiór symetrii układu tworzy grupę z działaniem grupowym będącym złożeniem przekształceń – symetrie ciągłe, a takimi się tutaj interesowaliśmy, tworzą grupę Liego.