Oto szkic rozumowania bezpośredniego, podobnego do przedstawionego w artykule. Jeżeli nasz układ równań ma rozwiązanie wymierne, to ma też rozwiązanie złożone z samych liczb całkowitych (wystarczy pomnożyć rozwiązanie wymierne przez wspólny mianownik występujących w nim liczb). Podstawiając to rozwiązanie do równań układu stwierdzamy, że $a_{ii}x_i$, dla wszystkich i, dzieli się przez p. Zatem przez p dzielą się wszystkie x_i. Z jednorodności układu wynika więc, że po podzieleniu rozwiązania przez p otrzymamy znowu całkowite rozwiązanie układu. Na mocy poprzedniego rozumowania znów wszystkie występujące w nim liczby dzielą się przez p, więc możemy je podzielić przez p itd. dowolną liczbę razy. Zważywszy, że układ $(0,\ldots,0)$ jest jedynym układem liczb całkowitych, który można dzielić przez daną liczbę dowolnie wiele razy, otrzymujemy żądany wynik.

Wszystkie współczynniki przy b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ po prawych stronach równości (9) dzielą się przez p. Istnieją więc takie liczby całkowite c_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n,$ $j = 1, 2, \ldots, n)$, że

$$
\begin{aligned}
(p - r_1)b_1 &= p(c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + \ldots + c_{1n}b_n)\\
(p - r_2)b_2 &= p(c_{21}b_1 + c_{22}b_2 + \ldots + c_{2n}b_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(p - r_n)b_n &= p(c_{n1}b_1 + c_{n2}b_2 + \ldots + c_{nn}b_n)\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

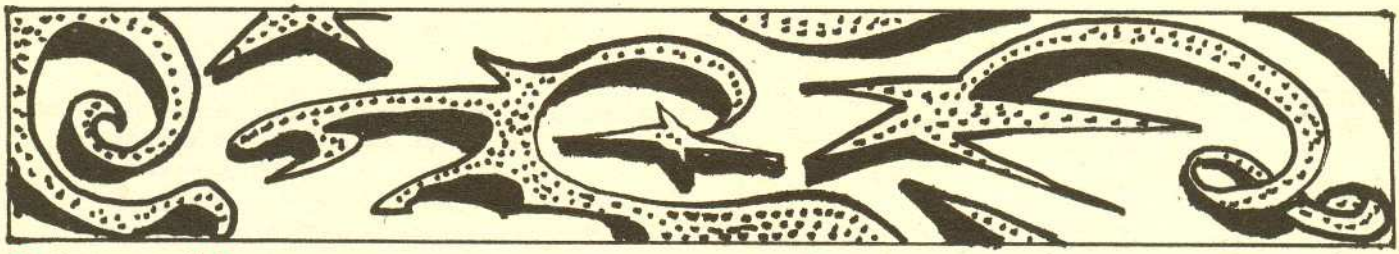
Bez zmniejszania ogólności można przyjąć, że $\max\{v_p(b_1), v_p(b_2), \ldots, v_p(b_n)\} = v_p(b_1)$. Z pierwszej równości układu (10) mamy

$$v_p(p - r_1)v_p(b_1) = v_p(p)v_p(c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + \ldots + c_{1n}b_n)\,. \tag{11}$$

Korzystając kolejno z własności (8), (5), (4) funkcji v_p i uwzględniając to, że $v_p(p) = \frac{1}{p}$ oraz $v_p(p - r_1) = 1$ (bo p nie dzieli $p - r_1$), z równości (11) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
v_p(b_1) &\le \frac{1}{p}\max\left\{v_p(c_{11}b_1), v_p(c_{12}b_2), \ldots, v_p(c_{1n}b_n)\right\} =\\
&= \frac{1}{p}\max\left\{v_p(c_{11})v_p(b_1), v_p(c_{12})v_p(b_2), \ldots, v_p(c_{1n})v_p(b_n)\right\} \le\\
&\le \frac{1}{p}\max\left\{v_p(b_1), v_p(b_2), \ldots, v_p(b_n)\right\} \le \frac{1}{p}v_p(b_1)\,.
\end{aligned}
$$

Z otrzymanej nierówności mamy $v_p(b_1) = 0$.
Ponieważ $v_p(b_1) = \max\left\{v_p(b_1), v_p(b_2), \ldots, v_p(b_n)\right\}$,
więc $v_p(b_1) = v_p(b_2) = \ldots = v_p(b_n) = 0$.
Stąd wobec (7) wynika, że $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.



Patrz w niebo

Nie od dziś wiemy, że galaktyki grupują się w gromadach galaktyk. Ale co to właściwie znaczy? Czy zgrupowania galaktyk to tylko nasze wrażenie czy fakt obiektywny?

Wyobraźmy sobie, że na pokratkowany arkusz papieru (niech tam będzie k kratek) rzucamy losowo N punktów. Prawdopodobieństwo, że jeden punkt trafi do określonej kratki, wynosi $1/k$, a że nie trafi $1 - 1/k$. Prawdopodobieństwo, że w tej kratce znajdzie się n punktów, będzie proporcjonalne do $\left(\frac{1}{k}\right)^n\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{N-n}$, bo jednocześnie $N - n$ punktów musi znaleźć się poza tą kratką. Ale stan taki może zostać zrealizowany na tyle sposobów, na ile można wybrać n elementów spośród N, czyli $\binom{N}{n}$. Ostatecznie więc prawdopodobieństwo, że w kratce znajdzie się dokładnie n punktów, wynosi

$$p(n) = \binom{N}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{N-n}.$$

Jest to tzw. rozkład Bernoulliego. Przewiduje on, że rozrzut (dyspersja) liczebności punktów w kratkach powinien wynosić

$$\sigma_0 = \sqrt{N\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)}\,.$$

Tymczasem w rzeczywistości tak być nie musi. Jeżeli dyspersja obserwowana

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{k}\Sigma\left(n_i - \frac{N}{k}\right)^2}$$

jest mniejsza od teoretycznej, to oznacza, że rozkład punktów (galaktyk) jest sztucznie wygładzony, jeżeli zaś większa, to są dwie możliwości: albo realne są gromady galaktyk, albo rozrzedzenia między nimi.

Zdawałoby się, że oczywista jest możliwość pierwsza – gromady galaktyk przecież po prostu widać. Wiele z nich liczy tysiące członków, ma elegancką sferyczną symetrię i jakby dla zaznaczenia swojej obecności jedną lub kilka szczególnie wielkich galaktyk w centrum. Gromady galaktyk są niewątpliwie największymi „cegiełkami" materii obdarzonymi wyraźną indywidualnością.

Ale okazuje się, że wszystko zależy od skali, w jakiej obserwuje się rozkład galaktyk. Obecność supergromad (tzn. gromad gromad) galaktyk już nie jest tak powszechna, a w jeszcze większej skali z zaskoczeniem zaobserwowano wyraźne rozrzedzenia. Zauważono, że gromady galaktyk gdzieniegdzie tworzą jakby ogromne włókna rozmieszczone w niemal pustej poza tym przestrzeni. Oczywiście, trzeba pamiętać, że to, co widzimy na niebie, jest rzutem rozkładu przestrzennego, a zatem w rzeczywistości świecąca materia (gromad galaktyk) rozmieszczona byłaby w gigantycznych płatach otaczających bąble pustej przestrzeni (voidy). Całość przypominałaby kosmicznych rozmiarów pianę.

Sprawa wielkoskalowego rozmieszczenia materii we Wszechświecie jest daleka od ostatecznego rozwiązania, a przyczyna częściowo tkwi w tym, że niekiedy jest bardzo trudno odpowiedzieć na pozornie banalne pytanie: co właściwie widzimy – zgęszczenia czy dziury?

dr Tomasz KWAST