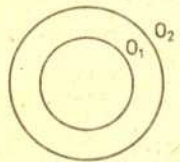


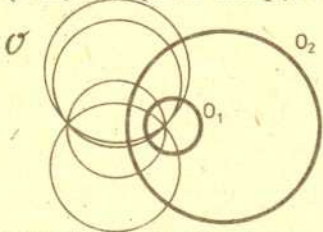
## Pęki okręgów

Skonstruujmy, dla dowolnie ustalonych okręgów  $O_1$  i  $O_2$ , rodzinę  $O'$  okręgów, z których każdy przecina  $O_1$  i  $O_2$  pod kątem prostym. Taką rodzinę nazywa się **pękiem okręgów**. Gdy, dla dowolnie ustalonych okręgów  $O'_1$  i  $O'_2$  należących do rodziny  $O'$ , powtórzmy tę konstrukcję, otrzymamy pęk  $O$ . Wstępnym krokiem do badania własności pęków może być wykazanie, że każdy wybór okręgów  $O'_1$  i  $O'_2$  (różnych) daje ten sam pęk  $O$ .

Propozycje ewentualnych tematów prac na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki zamieszczamy od numeru 3/1988 (z pominięciem numerów 6 i 12 z 1988 roku oraz 1, 6, 7 i 8 z roku bieżącego). Oczywiście, chętnie widzimy prace również na inne tematy.



Te dwa okręgi  $O_1$  i  $O_2$  nie wyznaczają żadnego pęku  $O'$ . Czy to jedyna „zła” sytuacja?



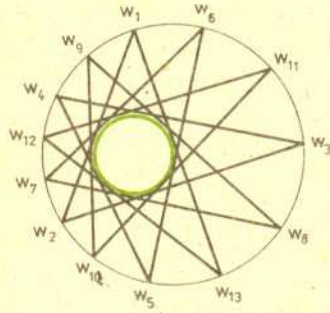
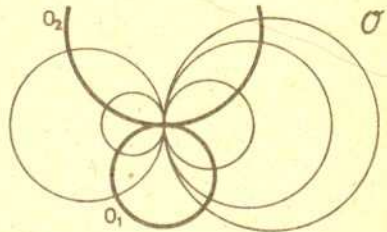
Pęki określa się też w inny sposób. Oznaczmy równanie

$$x^2 + y^2 + a_i x + b_i y + c_i = 0$$

krótko  $g_i(x, y) = 0$ . Jeśli  $g_1(x, y) \neq g_2(x, y)$ , to rodzinę figur mających równanie postaci

$$p \cdot g_1(x, y) + q \cdot g_2(x, y) = 0,$$

gdzie  $p$  i  $q$  to stałe rzeczywiste nie równe jednocześnie zeru, również nazywamy pękiem. Można łatwo sprawdzić, że w takim pęku są nie tylko okręgi (a co jeszcze?). Nasuwa się pytanie, jak zmodyfikować pierwszą definicję, by była równoważna drugiej. A może są to zupełnie różne pojęcia?



Badanie własności pęków okręgów jest ambitnym problemem matematycznym. Zamiast przytaczać tu szereg dających się uzyskać rezultatów, zwróćmy uwagę na twierdzenie o dwóch tylko okręgach, do którego uzyskania (podobno) pojęcie pęku jest niezbędne. Umieszczone w nawiasie słowo „podobno” wyraża fakt, że matematyka (jeśli wierzyć autorytetom) nie dysponuje żadnym eleganckim dowodem tego twierdzenia, a istniejące (bardzo zawiłe) dowody z pojęcia pęku korzystają. Jest to twierdzenie Poncela:

Jeżeli istnieje łamana zamknięta mająca  $n$  wierzchołków, z których każdy leży na okręgu  $O_1$  i której każdy bok jest styczny do okręgu  $O_2$ , to można taką ( $n$ -odcinkową) łamaną zamkniętą narysować zaczynając z dowolnego punktu okręgu  $O_1$ .

Opracował M.K.



## Zadania

Poziomy energetyczne atomu znajdującego się w zewnętrznym polu magnetycznym ulegają rozszczepieniu wskutek oddziaływania momentu magnetycznego powłoki elektronowej z polem magnetycznym. Rozszczepieniu poziomów odpowiada rozszczepienie linii widmowych promieniowania. Zjawisko to było zaobserwowane po raz pierwszy w 1896 r. przez Pietera Zeemana i nosi nazwę **efektu Zeemana**. W przypadku, gdy moment magnetyczny powłoki elektronowej związany jest jedynie z momentem orbitalnym elektronów (tzn. wkład spinowy wynosi 0), mówimy o **normalnym efekcie Zeemana**. Linia spektralna rozszczepia się wtedy na trzy składowe przesunięte w częstotliwości o  $\Delta\nu = 0$  bądź  $\Delta\nu = \pm \frac{eB}{4\pi m_e}$ , gdzie  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $e$  i  $m_e$  oznaczają odpowiednio ładunek i masę elektronu,  $B$  - indukcję pola magnetycznego. Jeśli wkład od spinowych momentów magnetycznych nie jest równy zeru, to wyróżnia się dwa skrajne przypadki: przypadek słabego pola - wtedy mówimy o **anomalnym efekcie Zeemana** i przypadek silnego pola - wtedy mówimy o **efekcie Paschena-Backa** od nazwisk fizyków, którzy to zaobserwowali po raz pierwszy w 1912 r.

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 553.** Dwóch korektorów wykonało (niezależnie) korektę tekstu. Pierwszy znalazł 450 błędów, a drugi 300, przy czym 250 błędów wykryli obaj. Podać oszacowanie faktycznej liczby błędów.

Rozwiązanie na str. 13

**M 554.** Ciąg  $(x_n)$  jest określony w następujący sposób:  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = x_n(2 - yx_n)$  dla  $n = 1, 2, \dots$ ;  $a$  oraz  $y > 0$  są ustalone. Zbadać, dla jakich  $a$  ciąg jest zbieżny i wyznaczyć jego granicę.

Rozwiązanie na str. 3

**M 555.** Jaka jest najmniejsza możliwa długość dłuższej przekątnej trapezu o polu 1? Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

**F 276.** Ocenic, jaka powinna być odległość  $L$  między zwierciadłami interferometru Fabry'ego-Pérot'a, aby z jego pomocą można było obserwować rozszczepienie Zeemana w polu magnetycznym o indukcji  $B = 1$  T. Zwierciadła interferometru posrebrzone są tak, że między nimi zachodzi  $N \cong 20$  odbić. Rozwiązanie na str. 7

**F 277.** Ocenic, jaką wielkość pola magnetycznego gwiazdy typu Słońca można zmierzyć na podstawie efektu Zeemana, w zakresie promieniowania widzialnego (przyjmujemy  $\omega = 10^{15} s^{-1}$ ). Okres obrotu gwiazdy  $\tau = 10^6$  s, promień  $R = 10^{10}$  cm, temperatura powierzchni  $T = 6000$  K. Rozwiązanie na str. 17