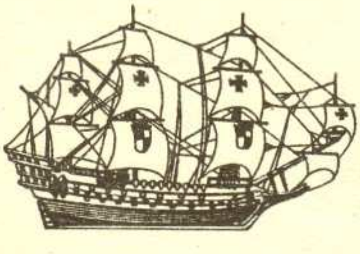
Patrz w niebo



Radioaktywność jest chyba powszechnie uważana za zjawisko długotrwałe. Wiemy przecież, że promieniotwórcze preparaty stosowane w medycynie służą latami, a pozbywanie się radioaktywnych odpadów jest poważnym problemem. Okazuje się jednak, że promieniotwórczość gra prawdopodobnie jedną z głównych ról w tak gwałtownym zjawisku, jakim jest wybuch supernowej.

Jak wiadomo, supernowe zostały podzielone na dwa typy. Typ II to eksplodujące gwiazdy o dużej masie. Uprzednio na drodze kolejnych reakcji termojądrowych doszło stopniowo do wytworzenia żelaznego jądra, ponieważ żelazo – jako pierwiastek o najsilniej związanych nukleonach – paliwem jądrowym już być nie może. Jądro takiej gwiazdy, gdy przekroczy określoną masę, może się już tylko zapaść pod własnym ciężarem, reszta gwiazdy również się, oczywiście, zapada i wyzwolona przy tym energia grawitacyjna powoduje w następnej chwili eksplozję, w wyniku której obiekt taki świeci przez jakiś czas z mocą miliardów Słońc. Z jądra powstaje prawdopodobnie gwiazda neutronowa, a otoczka rozpływa się w przestrzeni.

Inaczej nieco przebiega wybuch supernowej I typu. Ten etap osiągają gwiazdy niezbyt masywne, które nie są w stanie wyprodukować żelaznego jądra. U nich synteza termojądrowa zatrzymuje się na wytworzeniu węgla lub tlenu, następnie gwiazda dość łagodnie pozbywa się warstw zewnętrznych, a to, co zostaje, to biały karzeł. W samotności biały karzeł może już tylko powoli stygnąć. Jednak bardzo często jest składnikiem układu podwójnego, a wtedy może pobierać materię od gwiazdy towarzyszącej. Ponieważ jednak masa białego karła nie może przekroczyć 1,4 mas Słońca (jest to tzw. granica Chandrasekhara), to w końcu dochodzi do jego zapadnięcia się, co jest wstępną fazą wybuchu supernowej I typu. W ciągu kilku sekund jądro gwiazdy zostaje wypalone i wytworzona energia rozrywa gwiazdę. I tu rzecz niezwykła: wybuch taki mógłby być niewidoczny! Bowiem materia białego karła, zwłaszcza zapadającego się, jest bardzo gęsta, a więc nieprzezroczysta. Aby światło mogło się z jego wnętrza wydobyć w miarę swobodnie, musiałby spuchnąć setki tysięcy razy, ale wtedy ostygłby tak dalece, że znowu z zewnątrz nic specjalnego nie dałoby się zobaczyć.

Teraz dochodzi do głosu radioaktywność. Obliczenia modelowe dowodzą, że wskutek gwałtowności kolapsu gwiazdy synteza termojądrowa prowadzi do wytworzenia jądra zbudowanego z promieniotwórczego niklu ^{56}Ni, który rozpadając się następnie na kobalt i żelazo przez kilka dni ogrzewa rozprężającego się byłego białego karła z mocą usprawiedliwiającą nazwanie całego zjawiska wybuchem supernowej (I typu). A dowody na to już istnieją: linie niklu, kobaltu i żelaza w widmach supernowych zostały już zaobserwowane!

Dr Tomasz KWAST

Roczne omówienie zadań **Klubu 44** wraz ze szczegółowym regulaminem i obszernymi czołówkami zamieścimy w następnym numerze.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z fizyki nr 101, 102

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

101. Izolowana kula metalowa o promieniu 1 cm jest bombardowana przez szeroki strumień elektronów o energii 1000 eV. Po pewnym czasie zostaje osiągnięty stan równowagi. Jakie są w tym stanie: potencjał kuli, zgromadzony na niej ładunek oraz natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli?

102. Jednorodna, wiotka lina o długości l i masie m, z zawieszonym na jej dolnym końcu obciążnikiem o masie $M = 5$ m, zwisa swobodnie, zaczepiona swym górnym końcem. Wiejący poziomo ze stałą prędkością wiatr działa na linę siłą równą co do wartości ciężarowi liny, podczas gdy siła wiatru działająca na obciążnik jest zaniedbywalna w porównaniu z jego ciężarem. Jaki kąt tworzy lina z kierunkiem pionowym w punkcie jej zaczepienia? Obliczyć w sposób przybliżony metodami numerycznymi odchylenie obciążnika od pionu.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 87 (WT=2,72) i 88 (WT=1,57)
z numeru 4/1989

Jerzy Lipkowski	– Elbląg	44,01pkt
Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,40pkt
Aleksander Surma	– Myszków	41,57pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	39,57pkt
Piotr Bała	– Toruń	33,23pkt
Wojciech Pelsert	– Wrocław	32,77pkt
Andrzej Borowski	– Aleksandrów Kujawski	30,84pkt
Przemysław Gworys	– Częstochowa	30,19pkt
Jacek Stelmach	– Zabrze	29,44pkt
Mariusz Bogacz	– Pińczów	28,86pkt

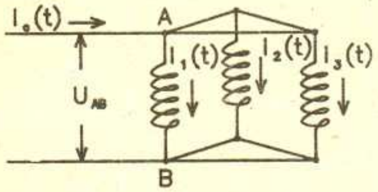
Pan Lipkowski po raz drugi przekroczył **44** punkty.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1989

Przypominamy treść zadań:

93. Trzy jednakowe cewki o indukcyjności L, nawinięte w tę samą stronę, połączono równolegle w taki sposób, że współczynnik indukcji wzajemnej każdej pary tych cewek jest jednakowy i wynosi M. Jaka jest indukcyjność zastępcza L_{AB} układu tych cewek?

94. Rakieta o masie własnej M = 4 Mg i początkowej masie paliwa m = 7 Mg rozpoczyna na wysokości H = 100 km nad powierzchnią Ziemi samodzielny lot z prędkością początkową v_0 = 1 km/s w kierunku pionowym ku górze. Przyjmując, że przez cały okres T = 90 s pracy silnika jego siła ciągu F = 100 kN jest stała i skierowana pionowo w górę, wyznaczyć zależność prędkości v rakiety oraz jej wysokości h od czasu i przedstawić ją w postaci wykresów. Obliczyć maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się rakieta.



93. Z definicji indukcyjności zastępczej mamy

(1) $$U_{AB} = L_{AB}\frac{\mathrm{d}I_C}{\mathrm{d}t},$$

gdzie U_{AB} jest napięciem między punktami A i B, natomiast I_C – natężeniem całkowitego prądu płynącego między tymi punktami.
Z symetrii wynika równość prądów w trzech cewkach:

$$I_1(t) = I_2(t) = I_3(t) = I(t).$$

W konsekwencji

(2) $$I_C(t) = 3I(t).$$

Dla dowolnej cewki, wobec ich nawinięcia w tę samą stronę, mamy

(3) $$U_{AB} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - 2M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

Z przyrównania wyrażeń (1) i (3), uwzględniającego związek (2), wynika, że

$$L_{AB} = \frac{1}{3}(L - 2M).$$

94. Równanie ruchu rakiety w przedziale czasu $t \in [0, T]$ ma postać

$$\big(M + m_p(t)\big)\frac{\mathrm{d}^2h(t)}{\mathrm{d}t^2} = F - \big(M + m_p(t)\big)g,$$

gdzie $m_p(t)$ jest masą paliwa w czasie t, g – przyspieszeniem ziemskim (na odpowiedniej wysokości). Opór powietrza – wobec bardzo rozrzedzonej na tych wysokościach atmosfery – został pominięty. Przyjmując, że w czasie T całe paliwo się wypala ze stałą szybkością, mamy

$$m_p(t) = m\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Z analitycznego rozwiązania tego problemu (patrz: A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki*, t.1, PWN 1984, str. 380-384) wynikają następujące wzory:

(1) $v(t) = v_0 - gt - u\ln(1 - kt)$,

(2) $h(t) = H + v_0t - g\frac{t^2}{2} + \frac{u}{k}\big((1 - kt)\ln(1 - kt) + kt\big)$,

gdzie $k = \frac{m}{(M+m)T}$, $u = \frac{FT}{m}$ (równe prędkości gazów wylatujących z silnika rakiety).
Dla $t > T$ ruch rakiety jest ruchem swobodnym w polu grawitacyjnym (rzut pionowy).
Ze względu na zależność przyspieszenia ziemskiego od wysokości $g = \big(R/(R+h)\big)^2 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, gdzie R = 6370 km – promień Ziemi, przyjmujemy dla przedziału $h \in [100\ \mathrm{km}, 200\ \mathrm{km}]$ średnią wartość $g = 9{,}4\ \mathrm{m/s^2}$ i ze wzorów (1), (2) obliczamy $v_1 = v(90\ \mathrm{s}) = 1440$ m/s oraz $h(90\ \mathrm{s}) = 201$ km. Wysokość osiągniętą w locie swobodnym wyznaczamy na podstawie wzoru $(\Delta h)_2 = v_1^2/(2g_1)$ podstawiając $g_1 = 9{,}1\ \mathrm{m/s^2}$ (średnie g dla $h \in [200\ \mathrm{km}, 320\ \mathrm{km}]$). Maksymalna wysokość, na jaką wzniesie się rakieta, jest równa $h_{max} = h(90\ \mathrm{s}) + (\Delta h)_2 = 315$ km. Zależności $v(t)$ oraz $h(t)$ są przedstawione na wykresach. Użyto w nich tylko jednej wartości $g = 9{,}3\ \mathrm{m/s^2}$, pomimo tego zgadzają się one z obliczonymi wyżej wynikami z dokładnością do około 0,5 %. Prędkość rakiety początkowo nieco maleje, co zrozumiałe wobec $F < (M + m)g$.
W rozwiązaniu numerycznym dzielimy przedział czasowy T na n odcinków czasowych $\Delta t = T/n$ i przyjmujemy $t_i = i\Delta t$, gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Masę całkowitą rakiety oraz jej przyspieszenie w chwili t określają wzory

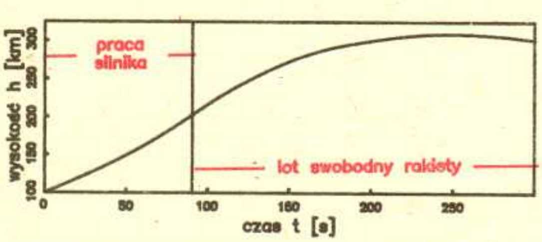
$$m_i = M + m\left(1 - \frac{i}{n}\right) \quad \text{oraz} \quad a_i = \frac{F}{m_i} - g.$$

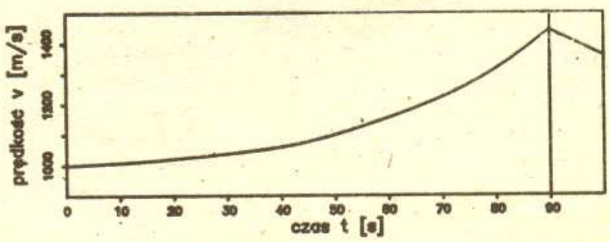
Oznaczając średnią prędkość w przedziale czasu $[t_{i-1}, t_i]$ przez v_i mamy

$$v_1 = v_0 + \left(\frac{F}{M+m} - g\right)\frac{\Delta t}{2}, \quad v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t$$

$$\text{oraz} \quad v(90\ \mathrm{s}) = v_n + a_n\frac{\Delta t}{2}.$$

Droga przebyta w przedziale czasu $[t_{i-1}, t_i]$ jest, oczywiście, równa $(\Delta h)_i = v_i\Delta t$, można jednak również korzystać z zależności $(\Delta h)_{i+1} = (\Delta h)_i + a_i(\Delta t)^2$.
Wyniki numeryczne uzyskane dla n = 70 (z użyciem programu, który ukaże się w książce: J. Ginter, R. Kutner, *Komputerem w Kosmos*, WSiP) pokrywają się z wynikami analitycznymi w granicach 10^{-3} %.





Zadania z matematyki nr 203, 204

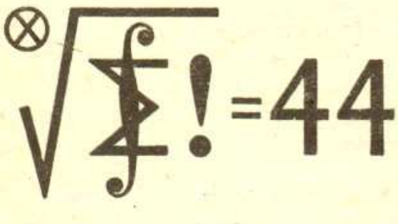
Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

203. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której istnieje 1990 różnych liczb naturalnych (dodatnich liczb całkowitych), nie przekraczających n, o tej własności, że żadna z nich nie jest dwukrotnością innej.

204. Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu

$$a_n = n^n(n!e - [n!e])^n .$$

Zadanie **204** zaproponował pan Piotr Jędrzejewicz z Torunia.



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1989

Przypominamy treść zadań:

195. Dwie identyczne talie po n kart stasowano razem. Odkrywamy karty po jednej do chwili, gdy wśród odkrytych kart znajdą się dwie identyczne. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby odkrytych kart.

196. Niech P_1, P_2, P_3 będą rzutami punktu P leżącego wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC odpowiednio na boki AB, BC, CA.
Dowieść, że iloraz $(|AP_1| + |BP_2| + |CP_3|)/(|PP_1| + |PP_2| + |PP_3|)$ jest wielkością stałą (gdy P przebiega wnętrze trójkąta) wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

195. Niech p_k będzie prawdopodobieństwem, z jakim rozważana zmienna losowa przyjmuje wartość k. Innymi słowy, p_k jest prawdopodobieństwem tego, że k–ta odkryta karta jest pierwszą identyczną z którąś z poprzednich $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$. Oznaczmy przez q_k prawdopodobieństwo tego, że wśród pierwszych k odkrytych kart nie ma dwóch jednakowych $(k = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$ i zauważmy, że $q_0 = 1$, $q_{n+1} = 0$, $q_{k-1} - q_k = p_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Szukana wartość oczekiwana wynosi

$$\begin{aligned} E_n &= p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n + (n+1)p_{n+1} = \\ &= (q_0 - q_1) + 2(q_1 - q_2) + \ldots + \\ &\quad + n(q_{n-1} - q_n) + (n+1)q_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n . \end{aligned}$$

Liczba możliwych kombinacji kart odkrytych w k pierwszych ruchach wynosi $\binom{2n}{k}$ (abstrahujemy od kolejności); wśród nich jest $2^k\binom{n}{k}$ układów bez pary kart identycznych (wybór po 1 elemencie z k par spośród n par). Liczby te – to mianownik i licznik ułamka wyznaczjącego prawdopodobieństwo q_k. A zatem

$$q_k = 2^k\binom{n}{k}\binom{2n}{k}^{-1} = 2^{n-j}\binom{2n}{n}^{-1}\binom{n+j}{j},$$

gdzie $j = n - k$.
Stąd

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} q_k = 2^n\binom{2n}{n}^{-1} S_n ,$$

gdzie $S_n = \sum_{j=0}^{n} 2^{-j}\binom{n+j}{j}$.
Dla $n \geq 2$ mamy równość

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\left(\binom{n+j-1}{j-1} + \binom{n+j-1}{j}\right) = \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j-1}\binom{n+j}{j} + \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\binom{n-1+j}{j} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(S_n - 2^{-n}\binom{2n}{n}\right) + \\ &\quad + \left(S_{n-1} - 1 + 2^{-n}\binom{2n-1}{n}\right) = \frac{1}{2}S_n + S_{n-1} , \end{aligned}$$

czyli $S_n = 2S_{n-1}$. Ponieważ $S_1 = 2$, zatem $S_n = 2^n$ i ostatecznie $E_n = 4^n\binom{2n}{n}^{-1}$.

Uwaga. Korzystając ze wzoru Stirlinga można wykazać, że znaleziona wartość równa się w przybliżeniu $\sqrt{\pi n}$. Dokładniej: $E_n = \alpha_n\sqrt{\pi n}$, gdzie $1 < \alpha_n < \left(\frac{12n}{12n-1}\right)^2$. Na przykład dla $n = 52$ mamy $E_{52} = 12,8 \pm 0,02$. Układając pasjansa z dwóch zwykłych talii kart, dobrze potasowanych, oczekujemy więc pierwszego powtórzenia karty gdzieś około 13 miejsca.

196. Oznaczmy rozważane wyrażenie przez $f(P)$; dopuszczamy położenia punktu P nie tylko wewnątrz, ale i na brzegu trójkąta ABC. Gdy punkt P przebiega ruchem jednostajnym dowolny odcinek zawarty w trójkącie ABC, wówczas zarówno licznik, jak i mianownik $f(P)$ zmienia się w sposób liniowy. Jeżeli trójkąt ABC jest równoboczny, to $f(P)$ przyjmuje jednakową wartość dla P będącego dowolnym z trzech wierzchołków. Zatem funkcja f jest stała wzdłuż każdego boku trójkąta; dalej: jest stała wzdłuż każdego odcinka o końcach na brzegu trójkąta ABC, czyli po prostu: jest stała.

Dowodzimy teraz implikacji przeciwnej. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem ostrokątnym. Oznaczając przez O i I środki okręgów opisanego i wpisanego, przez R i r promienie tych okręgów, przez a, b, c długości boków trójkąta, a przez α, β, γ miary odpowiednich kątów otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} f(O) &= \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}} = \\ &= \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} = \frac{4t}{4s+1} , \end{aligned}$$

gdzie $t = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, $s = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$,
oraz

$$\begin{aligned} f(I) &= \frac{r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + r\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + r\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}}{3r} = \\ &= \frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{t}{3s} . \end{aligned}$$

Jeżeli $f = const$, to, oczywiście, $f(O) = f(I)$ i z równania $\frac{4t}{4s+1} = \frac{t}{3s}$ wyznaczamy $s = \frac{1}{8}$. Z wklęsłości funkcji sinus oraz z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną wynika zaś, że

$$s \leq \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3 \leq \left(\sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{8} ,$$

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy $\alpha = \beta = \gamma$. Tak więc f jest funkcją stałą tylko w przypadku trójkąta równobocznego.